

Электродинамические силы, действующие на контур с током в поле соленоида при его перемещении вдоль оси

ЦИЦИКЯН Г.Н., АНТИПОВ М.Ю.

На конкретных примерах продемонстрирована целесообразность использования выражений для коэффициентов взаимной индуктивности и электродинамических сил взаимодействия в системе круговых соленоидов и контуров с общей осью, полученных авторами ранее на основании аналитического исследования. Сопоставлены численные результаты по выражениям, представляющим коэффициенты взаимной индуктивности в виде записанных рядов, с другими известными рекомендациями, требующими использования таблиц или графиков. Представлено выражение для электродинамической силы взаимодействия контура и соленоида с током и построены зависимости для них при различных положениях контура вдоль оси соленоида.

К л ю ч е в ы е с л о в а : круговые соленоиды, контуры с общей осью, электродинамические силы, взаимная индуктивность

В [1] для взаимных индуктивностей и сил взаимодействия соосных контуров, соленоидов и катушек были получены выражения, представленные как с помощью рядов, так и через сферические функции Лежандра второго рода с полуцелым индексом. Вместе с тем не все частные случаи, вытекающие из полученных выражений [1], были рассмотрены подробно, поэтому целесообразно остановиться на выводах и практических результатах, не акцентированных в своё время. В качестве меры соответствия полученных выражений для расчёта взаимной индуктивности и электродинамических сил могут быть избраны рекомендации по расчёту в справочных книгах [2, 3], особенность которых — систематическое использование табличных значений и графических зависимостей. Поэтому соответствие полученных выражений данным на основе

таблиц указывает на возможность их применения в качестве альтернативного метода расчёта и получения результата.

Для двух соленоидов с общей осью (рис. 1) было получено выражение для коэффициента взаимной индукции [1]:

$$M = \frac{\pi\mu_0 w_1 w_2 R_1}{(2s_1/R_1)(2s_2/R_2)} \sum_{k=1}^4 (-1)^{k-1} \left\{ \frac{1}{2} \left[(q_k^2 + 1)^{1/2} - q_k \right] - \frac{1}{16} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 \frac{1}{(q_k^2 + 1)^{3/2}} - \frac{1}{128} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^4 \frac{1 - 4q_k^2}{(q_k^2 + 1)^{7/2}} - \frac{5}{2048} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^6 \frac{8q_k^4 - 12q_k^2 + 1}{(q_k^2 + 1)^{11/2}} + \dots \right\}, \quad (1)$$

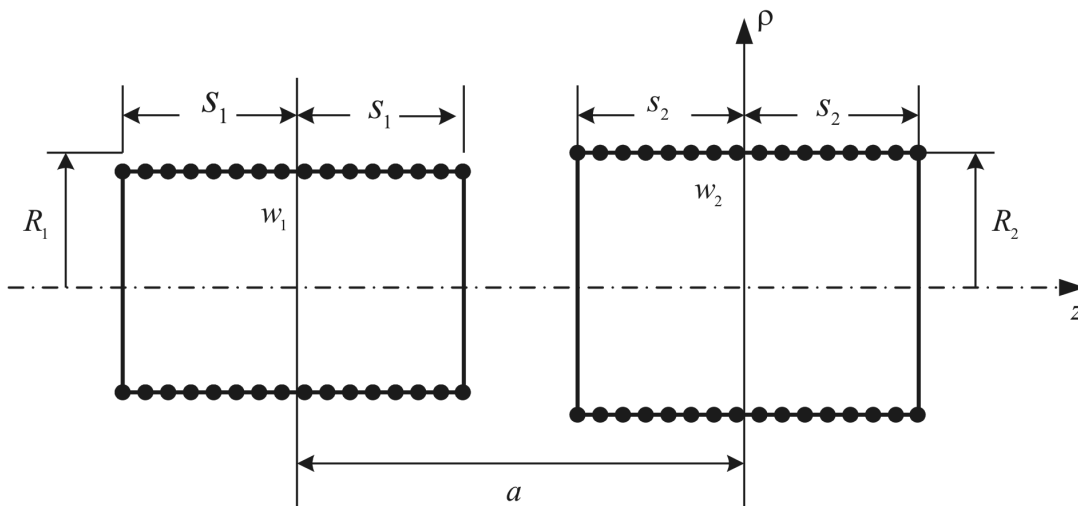


Рис. 1. Два соленоида с общей осью

где

$$q_1 = (a - s_1 - s_2) / R_2; \quad q_2 = (a + s_1 - s_2) / R_2;$$

$$q_3 = (a + s_1 + s_2) / R_2; \quad q_4 = (a - s_1 + s_2) / R_2.$$

При $s_1 \rightarrow 0$ $w_1 = 1$, т.е. для случая на рис. 2 формула (1) после раскрытия неопределённости может быть записана в виде:

$$M_{s_1 \rightarrow 0} = \frac{\pi \mu_0 w_2 R_1^2}{4s_2} \left\{ \frac{(q_{10}^2 + 1)^{1/2} - q_{10}}{(q_{10}^2 + 1)^{1/2}} - \frac{(q_{20}^2 + 1)^{1/2} - q_{20}}{(q_{20}^2 + 1)^{1/2}} - \frac{3 \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2}{8} \left(\frac{q_{10}}{(q_{10}^2 + 1)^{5/2}} - \frac{q_{20}}{(q_{20}^2 + 1)^{5/2}} \right) - \frac{5 \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^4}{64} \left(q_{10} \frac{3 - 4q_{10}^2}{(q_{10}^2 + 1)^{9/2}} - q_{20} \frac{3 - 4q_{20}^2}{(q_{20}^2 + 1)^{9/2}} \right) + \frac{35 \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^6}{1024} \left(q_{10} \frac{-8q_{10}^4 + 20q_{10}^2 - 5}{(q_{10}^2 + 1)^{13/2}} - q_{20} \frac{-8q_{20}^4 + 20q_{20}^2 - 5}{(q_{20}^2 + 1)^{13/2}} \right) \dots \right\}, \quad (2)$$

где $q_{10} = \frac{a - s_2}{R_2}; \quad q_{20} = \frac{a + s_2}{R_2}.$

Электродинамическая сила взаимодействия

$$f_z = -i_1 i_2 \frac{\partial M}{\partial a},$$

где i_1 – ток контура; i_2 – ток соленоида, и нетрудно показать, что

$$f_z = -i_1 i_2 \frac{\partial M}{\partial a} = \frac{\pi \mu_0 i_1 i_2 w_2 R_1^2}{4s_2 R_2} \left\{ \frac{1}{(q_{10}^2 + 1)^{3/2}} - \frac{1}{(q_{20}^2 + 1)^{3/2}} + \frac{3 \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2}{8} \left[\frac{1 - 4q_{10}^2}{(q_{10}^2 + 1)^{7/2}} - \frac{1 - 4q_{20}^2}{(q_{20}^2 + 1)^{7/2}} \right] + \frac{15 \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^4}{64} \left[\frac{8q_{10}^4 - 12q_{10}^2 + 1}{(q_{10}^2 + 1)^{11/2}} - \frac{8q_{20}^4 - 12q_{20}^2 + 1}{(q_{20}^2 + 1)^{11/2}} \right] - \frac{35 \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^6}{1024} \left[\frac{64q_{10}^6 - 240q_{10}^4 + 120q_{10}^2 - 5}{(q_{10}^2 + 1)^{15/2}} - \frac{64q_{20}^6 - 240q_{20}^4 + 120q_{20}^2 - 5}{(q_{20}^2 + 1)^{15/2}} \right] \right\}. \quad (3)$$

Из (3) при $s_2 \rightarrow 0$, $a \sim R_2$ и $w_2 = 1$ следует приближённое выражение для электродинамической силы взаимодействия [1]:

$$f_z = -\pi \mu_0 i_1 i_2 \frac{3 R_1^2 R_2^2}{2 a^4},$$

не отличающееся от выражения (4) в работе [4] с учётом разницы в обозначениях.

Вернёмся к (2) и, положив $a = s_2$, $q_{10} = 0$, $q_{20} = \frac{2s_2}{R_2}$, получим:

$$M|_{\substack{s_1 \rightarrow 0 \\ a = s_2}} = \frac{\pi \mu_0 w_2 R_1^2}{4s_2} \left\{ 1 - \frac{(q_{20}^2 + 1)^{1/2} - q_{20}}{(q_{20}^2 + 1)^{1/2}} + \frac{3 \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2}{8} \frac{q_{20}}{(q_{20}^2 + 1)^{5/2}} + \frac{5 \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^4}{64} q_{20} \frac{3 - 4q_{20}^2}{(q_{20}^2 + 1)^{9/2}} - \frac{35 \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^6}{1024} q_{20} \frac{-8q_{20}^4 + 20q_{20}^2 - 5}{(q_{20}^2 + 1)^{13/2}} \dots \right\}. \quad (4)$$

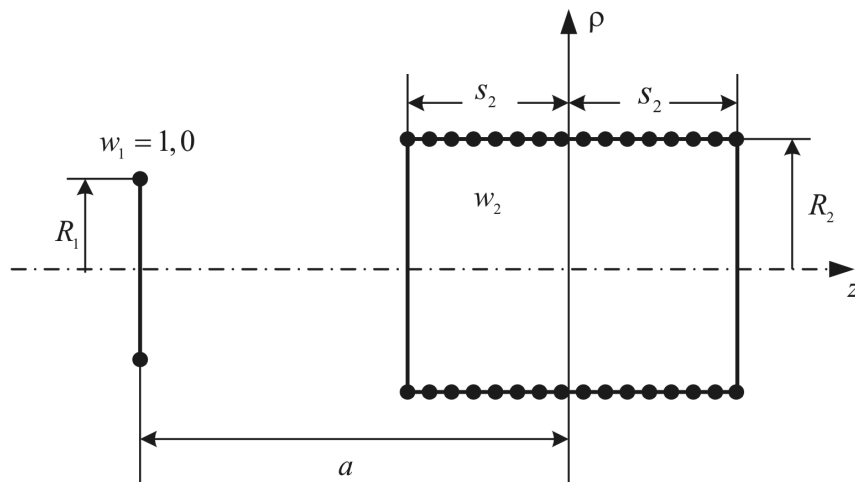


Рис. 2. Соленоид и контур с общей осью

При $s_2 \rightarrow 0$ имеем ряд:

$$M|_{\substack{s_1 \rightarrow 0 \\ a=s_2 \rightarrow 0}} = \frac{\pi\mu_0 R_1^2}{2R_2} \left[1 + \frac{3}{8} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 + \frac{15}{64} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^4 + \frac{175}{1024} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^6 + \dots \right], \quad (5)$$

который не отличается от ряда в [2], если переобозначить R_2 на R_1 и, соответственно, R_1 на R_2 . Этот ряд определяет собой коэффициенты взаимной индукции для соосных круговых контуров, лежащих в одной плоскости, когда один контур значительно меньше другого [2].

Возвращаясь к (4), заметим, что она представляет собой выражение для взаимной индуктивности контура радиусом R_1 и соленоида длиной $2s_2$, числом витков w_2 с радиусом R_2 при совпадении плоскости витка с ближним торцом соленоида кругового сечения (рис. 2 при $a=s_2$). На этот счёт в справочнике [2] для соленоида и контура, лежащего в торцевой плоскости соленоида, взаимную индуктивность определяют по выражению:

$$M = \frac{\pi}{2} \mu_0 w_2 \frac{R_1^2}{R_2} \beta F. \quad (6)$$

где $\beta^2 = \frac{4R_2^2}{4R_2^2 + 16s_2^2} = \frac{R_2^2}{R_2^2 + 4s_2^2}$ при длине соленоида $2s_2$ и условии, что $R_1/R_2 < 1$.

Значение F определяется в соответствии с таблицей справочника в зависимости от параметров $\delta = R_1/R_2$ и β^2 . Примем $R_1/R_2 = 0,8$ и $R_1/R_2 = 0,5$ при $\beta^2 = 0,2$, т.е. когда $s_2 = R_2$ и $q_{20} = 2$. В соответствии с таблицей для первого случая $F = 1,009$ и для второго $F = 1,0036$. Тогда в соответствии с (6) для первого находим $M = \frac{\pi}{2} \mu_0 w_2 R_1 \cdot 0,361$, а для второго

$M = \frac{\pi}{2} \mu_0 w_2 R_1 \cdot 0,2244$. Сравним эти результаты с результатами по формуле (4) при тех же исходных данных $s_2 = R_2$, $q_{10} = 2$:

для первого случая

$$M|_{R_1/R_2=0,8} = \frac{\pi\mu_0 w_2 R_1}{2} \cdot 0,4 \{ 1 - 0,10557 + 0,00859 -$$

$$- 0,00059 \dots \} = \frac{\pi\mu_0 w_2 R_1}{2} \cdot 0,36097;$$

для второго случая

$$M|_{R_1/R_2=0,5} = \frac{\pi\mu_0 w_2 R_1}{2} \cdot 0,25 \{ 1 - 0,10557 + 0,00335 -$$

$$- 0,00009 \dots \} = \frac{\pi\mu_0 w_2 R_1}{2} \cdot 0,22442.$$

Результаты расчётов практически совпали.

Перейдём к рассмотрению формулы (3). Невозможно показать, что она не отличается от (26) в работе [1], полученной для расположения контура с током i_1 радиуса R_1 внутри соленоида с током i_2 длиной $2s_2$ и с числом витков w_2 в соответствии с (рис. 3):

$$q_{10}^2 = q_{11}^2 = \left(\frac{a-s_2}{R_2} \right)^2;$$

$$q_{20}^2 = \left(\frac{a+s_2}{R_2} \right)^2 = \left(\frac{-a-s_2}{R_2} \right)^2 = q_{12}^2,$$

как это задано для формулы (26), с одной лишь оговоркой, что в (26) в третьем члене квадратной скобки вместо 64 должно быть 128.

Построим кривую для сил взаимодействия в единицах $\pi\mu_0 i_1 i_2 w_2$ при $R_1/R_2 = 0,8$ в соответствии с (3) при различных положениях контура относительно плоскости $z=0$. Дополнительно примем $R_2 = s_2 = s$, тогда при $a \gg R_2$ — $q_{20} \approx q_{10} \gg 1$ и $f_z \rightarrow 0$, а при $a=0$ — $q_{20}^2 = q_{10}^2 = 1,0$ и $f_z = 0$. При совмещении с торцом соленоида, когда $a=s$, имеем $q_{10} = 0$, $q_{20} = 2$, и тогда $f_z = \pi\mu_0 i_1 i_2 w_2 \cdot 0,2085$ (кривая 1, рис. 4). Построим теперь кривую распределения сил (кривая 2, рис. 4) при $R_1/R_2 = 0,5$ и $s_1/R_2 = 0,5$. При $a=s_2$ имеем $q_{10} = 0$ и $q_{20} = 1$. Тогда сила взаимодействия определяется кривой 2 (рис. 4), а максимум кривой — в соответствии с выражением $f_z = \pi\mu_0 i_1 i_2 w_2 \cdot 0,0976$. Если принять $i_1 = i_2 = 1$ А, $w_2 = 1$, то $f_z = 3,853 \cdot 10^{-7}$ Н.

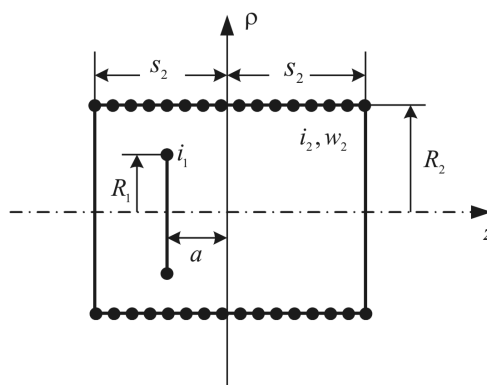


Рис. 3. Контур с током i_1 радиуса R_1 внутри соленоида длиной $2s_2$ с током i_2 и с числом витков w_2 радиуса R_2

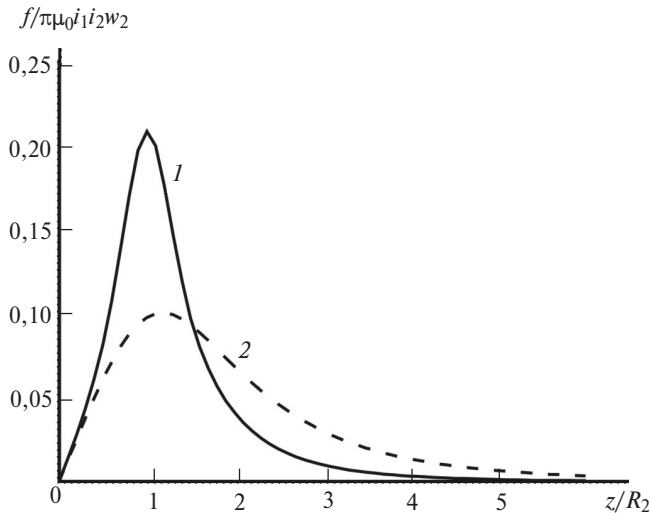


Рис. 4. Графики зависимости для силы взаимодействия между соленоидом и витком: 1 — $R_1 = 0,8R_2$, $R_2 = s_2$; 2 — $R_1 = 0,5R_2$, $s_1 = 0,5R_2$

Перейдем к выражению для взаимной индуктивности двух соосных круговых контуров (рис. 5), записанном в [1] в виде ряда:

$$M = \frac{\pi\mu_0 R_1^2}{2R_2} \left\{ (q^2 + 1)^{-3/2} + \frac{3}{8} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 \frac{1 - 4q^2}{(q^2 + 1)^{7/2}} + \frac{15}{64} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^4 \frac{8q^4 - 12q^2 + 1}{(q^2 + 1)^{11/2}} - \frac{35}{1024} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^6 \times \frac{64q^6 - 240q^4 + 120q^2 - 5}{(q^2 + 1)^{15/2}} + \dots \right\}, \quad (7)$$

где $q = z/R_2$.

Рекомендуемые в [2] выражения для определения M даны в двух вариантах: в виде строгого выражения (5-24), содержащего полные эллиптические интегралы первого и второго родов и выражения (5-20). Оба варианта предполагают использование табличных значений. Есть и третий способ определения M — по формуле

$$M = \mu_0 \sqrt{R_1 R_2} Q_{1/2}(g), \quad (8)$$

где $g = 1 + \frac{z^2 + (R_2 - R_1)^2}{2R_1 R_2}$, но предполагающей вы-

числение функции Лежандра второго рода $Q_{1/2}(g)$, в том числе с использованием таблиц [5].

Выражение (5-20) в [2] записано в виде

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \sqrt{R_1 R_2} F, \quad (9)$$

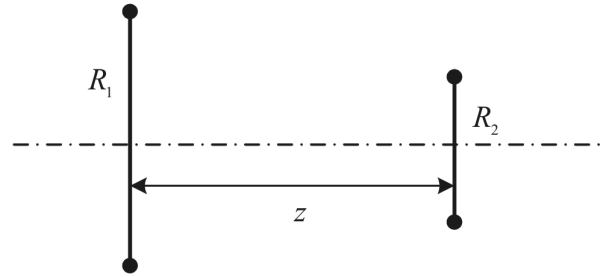


Рис. 5. К определению взаимной индуктивности двух контуров радиусом R_1 и R_2

где значения F даны в табл. 5-5 в функции от

$$m^2 = \frac{(R_1 - R_2)^2 + z^2}{(R_1 + R_2)^2 + z^2};$$

отметим, что из сопоставления (8) и (9) должно следовать $Q_{1/2}(q) = F/4\pi$. Для простоты сопоставления положим $R_1 = R_2 = R$ и $z/R = 1$, тогда $g = 1,5$, $Q_{1/2}(1,5) = 0,39318$ [5], следовательно, $M = \mu_0 R \cdot 0,39318$. При этих условиях $m^2 = 0,2$ и $F = 4,941$ [2], откуда $M = \mu_0 R \frac{F}{4\pi} = \mu_0 R \cdot 0,39319$, т.е.

имеем совпадение. Теперь используем ряд (7) и получаем

$$M = \mu_0 R \frac{\pi}{2} [0,35355 - 0,09944 - 0,01554 + 0,01152 \dots] = \mu_0 R \cdot 0,39284.$$

Сравнения показывают, что численные оценки практически совпадают. Наконец, приведём выражение для силы взаимодействия двух круговых соосных витков с током i_1 и i_2 . Его можно получить из (3) путём раскрытия неопределённости вида $0/0$ при $s_2 \rightarrow 0$. Воспользуемся выражением из [1]:

$$f_z = \frac{\pi\mu_0 i_1 i_2}{2} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 \left[-\frac{3q}{(q^2 + 1)^{5/2}} - \frac{15}{8} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 q \frac{3 - 4q^2}{(q^2 + 1)^{9/2}} + \frac{105}{64} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^4 q \frac{-8q^4 + 20q^2 - 5}{(q^2 + 1)^{13/2}} - \frac{315}{1024} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^6 \times q \frac{-64q^6 + 336q^4 - 280q^2 + 35}{(q^2 + 1)^{17/2}} \dots \right]. \quad (10)$$

При $q = z/R_2 = 0$ значение $f_z = 0$.

Другие формулы для расчёта сил взаимодействия двух витков с токами i_1 и i_2 в виде замкнутых выражений даны в [5, 6].

Таким образом, представлена совокупность выражений для взаимной индуктивности и электродинамических сил в системе соосных круговых контуров, которые позволяют делать вычисления в большинстве случаев без обращения к табличным данным. Следует отметить, что в случае перемеще-

ния вдоль оси недеформируемого контура с током через плоскость симметрии соленоида или многослойной катушки возможно его ускорение путём изменения направления тока в контуре на противоположное, что может оказаться востребованным для некоторых практических применений. Так, при достаточном удалении от торца соленоида и изменении знака тока на противоположное появляются предпосылки для организации возвратно поступательного движения путём изменения направления тока на противоположный при прохождении нулевой плоскости, а затем на достаточном удалении по обе стороны от торцевых плоскостей соленоида.

В заключение отметим, что общее выражение для взаимной индукции двух соосных соленоидов приведено в [1]. Если принять $z_{cp} = 0$, то получим (1). Если положить $a = 0$, то в (1) следует подставить:

$$q_1 = \frac{z_{cp} - s_1 - s_2}{R_2}; \quad q_2 = \frac{z_{cp} + s_1 - s_2}{R_2};$$

$$q_3 = \frac{z_{cp} + s_1 + s_2}{R_2}; \quad q_4 = \frac{z_{cp} - s_1 + s_2}{R_2}.$$

Electrichestvo, 2020, No. 8, pp. 58–62

DOI:10.24160/0013-5380-2020-8-58-62

The Electrodynamic Forces Acting on a Current Loop Placed in the Solenoid Field in Moving It along the Axis

TSITSIKYAN Georgy N. (*Krylov State Research Centre, SET Branch, St. Petersburg, Russia*) – Deputy Head of Dept., Academic secretary of Scientific and Technical Council, Dr. Sci. (Eng.)

ANTIPOV Mikhail Yu. (*Krylov State Research Centre, SET Branch, St. Petersburg, Russia*) – Ind Category Design Engineer

The advisability of using expressions for the mutual inductance coefficients and electrodynamic forces of interaction in a system of circular solenoids and loops with a common axis that were obtained previously from an analytical study is shown on particular examples. The numerical results obtained from the expressions representing the mutual inductance coefficients in the form of written series are compared with the other known recommendations involving the use of tables or graphs. An expression for the electrodynamic force of interaction between the loop and a solenoid with current is presented, and dependences for them constructed for different positions of the loop along the solenoid axis are given.

Key words: circular solenoids, loops with a common axis, electrodynamic forces, mutual inductance

REFERENCES

1. Tsitsikyan G.N. *Izv. AN SSSR. Energetika i transport* – in Russ. (*News of USSR. Energetics and Transport*), 1985, No. 6, pp. 90–99.

2. Kalantarov P.L., Tseytlin L.A. *Raschet induktivnostey: Spravochnaya kniga* (Calculation of inductances: Reference book). L.: Energoatomizdat, 1986, 488 p.

3. Nemtsov M.V. *Spravochnik po raschotu parametrov katushek induktivnosti* (A guide to calculating the parameters of inductors). M.: Energoatomizdat, 1989, 192 p.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Цицикян Г.Н. Взаимные индуктивности и силы взаимодействия соосных контуров, соленоидов и катушек. — Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1985, № 6, с. 90–99.

2. Калантаров П.Л., Цейтлин Л.А. Расчет индуктивностей: Справочная книга. Л.: Энергоатомиздат, 1986, 488 с.

3. Немцов М.В. Справочник по расчёту параметров катушек индуктивности. М.: Энергоатомиздат, 1989, 192 с.

4. Bueno M. and A.K.T. Assis Deriving Force from Inductance — IEEE Transactions on Magnetics, January 1998, vol. 34, No. 1, pp. 317–319.

5. Цицикян Г.Н. О коэффициентах взаимной индукции и силах взаимодействия круговых коаксиальных контуров. — Электричество, 2019, № 6, с. 59–65.

6. Цицикян Г.Н. О взаимной индуктивности и электродинамических силах взаимодействия коаксиальных контуров. — Изв. АН. Энергетика, 2018, № 4, с. 40–45.

[16.03.2020]

А в т о р ы: Цицикян Георгий Николаевич – доктор техн. наук, зам. начальника отдела, ученый секретарь НТС филиала «ЦНИИ СЭТ» ФГУП «Крыловский государственный научный центр», диссертацию защитил в 1990 г.

Антипов Михаил Юрьевич – инженер 1-й категории филиала «ЦНИИ СЭТ» ФГУП «Крыловский государственный научный центр».

[16.03.2020]