

Схемно-алгебраический расчет установившихся режимов электрических сетей

КУРГАНОВ С.А., ФИЛАРЕТОВ В.В.

УГТУ, Ульяновск, Россия

В итерационных алгоритмах расчета установившихся режимов электрических сетей переменного тока предлагается использовать компактные символьно-численные функции узловых напряжений, формируемые методом схемных определителей однократно. Эти функции за счет алгебраической свертки имеют многократно меньшую сложность, чем развернутые выражения, получаемые методом деревьев. Такие функции находятся по схемно-алгебраическим формулам в виде отношения схемных определителей путем выделения параметров. В первую очередь выделяются проводимости (сопротивления), составленные из большего числа параллельных (последовательных) ветвей и инцидентные узлам с минимальной (максимальной) степенью. Исходная и производные схемы рекурсивно делятся на близкие по сложности части. Показано, что известные компьютерные системы для аналитических вычислений не учитывают особенностей электрических цепей, не обеспечивая компактной свертки.

К л ю ч е в ы е с л о в а: электрическая сеть, установившийся режим, символьно-численные функции, схемно-алгебраический метод, итерационный расчет

О расчете установившихся режимов электрических сетей. При решении нелинейных уравнений для узловых напряжений электрических сетей с постоянной мощностью в узлах используются численные методы с быстрой сходимостью (метод Ньютона—Рафсона, его модификации [1, 2], метод матрицы узловых сопротивлений [2, 3]). В ходе итераций или при повторном расчете соответствующие уравнения многократно формируются и решаются.

В то же время для многовариантного анализа линейных электронных цепей нередко используются символьно-численные передаточные функции, в которых варьируемые параметры задаются символами, а остальные параметры — численными значениями [4]. Такие функции получаются однократно, а применяются многократно при различных параметрах элементов, что уменьшает вычислительные затраты. Использование символьных вычислений тем более предпочтительно при анализе электрических сетей, которые отличаются разреженной структурой [5], что уменьшает сложность выражений.

При итерационном расчете электрических сетей матрица узловых сопротивлений Z формируется через символьную матрицу C коэффициентов распределения узловых токов [3]. Элементы матрицы C находятся в развернутом виде по алгоритму [6], требующему поиска деревьев электрической сети, хотя формулы рекурсивного выделения проводимо-

стей и сопротивлений для получения свернутых выражений определителей [7, 8] изложены в известном учебнике по теоретическим основам электротехники [9].

Для десятиузловой электрической сети [3] развернутый знаменатель токовых коэффициентов C , как показано ниже, содержит 6673 слагаемых, являющихся произведениями проводимостей деревьев, т.е. требуется 46711 умножений и 6672 сложения. Однако в оптимальном выражении по методу схемных определителей (МСО) [10–12] с использованием формул выделения параметров из [7, 8] число операций сокращается до 43 и 67 соответственно.

Развернутые выражения можно привести к вложенной форме с помощью систем аналитических вычислений [13, 14]. Сформированные выражения отличаются существенно меньшей сложностью по сравнению с развернутыми выражениями, но многократно превышают в числе операций выражения, полученные по МСО [10]. Так, свертывание того же определителя десятиузловой сети [3] с помощью систем *Maple* [13] или *Mathematica* [14] уменьшает число умножений и сложений до 483 и 1481 или 25715 и 5523 соответственно, что в лучшем случае в 10 и 20 раз больше оптимальных значений.

В настоящей работе предлагается рассчитывать установившийся режим электрических сетей на основе компактных символьно-численных формул узловых напряжений, формируемых по МСО.

Основы метода схемных определителей [10–12].

Схемным определителем (СО) называется символьное выражение, тождественное определителю матрицы параметров, составленной по законам Кирхгофа, но не содержащее избыточных пар слагаемых с противоположными знаками. Обозначается СО, как и матричный определитель, символом Δ или парой вертикальных линий, между которыми изображается схема. Символьное выражение СО получается в результате рекурсивного применения формул выделения параметров [7, 8]:

$$\Delta = Z\Delta^Z + \Delta_Z; \tag{1}$$

$$\Delta = Y\Delta^Y + \Delta_Y, \tag{2}$$

для сопротивления Z и проводимости Y соответственно. В (1) и (2) верхний индекс означает удаление из схемы соответствующего элемента, а нижний – замену на идеальный проводник. Многократное сжатие выражения определителя обеспечивается выделением не отдельных элементов, а сопоставимых по сложности подсхем [10–12].

Напряжение и ток в цепи находятся по аналогии с правилом Крамера в виде отношения определителей схем числителя Δ_N и знаменателя Δ_D , которое представляет собой схемно-алгебраическую формулу (САФ), содержащую одновременно схемные образы и алгебраические операции. Схема знаменателя Δ_D получается из исходной схемы заменой источника напряжения и приемника тока идеальными проводниками или удалением источника тока и приемника напряжения. Схема числителя Δ_N получается заменой источника напряжения (тока) норатором, а приемника напряжения (тока) – нуллатором [11]. Норатор и нуллатор (обозначаются двойной и одинарной укрупненной стрелкой) образуют нуллок – идеальный операционный усилитель. Напряжение и ток на нуллаторе нулевые, а на нораторе произвольные и зависят от схемы.

Рекурсивное применение формул выделения (1) и (2), деления схемы на две части (бисекции) [12] и эквивалентных упрощений [11] приводит САФ к алгебраическому выражению. В первую очередь следует выделять проводимости (сопротивления), инцидентные узлам с минимальной (максимальной) степенью и имеющие наибольшую кратность – число параллельных или последовательных ветвей. Исходная схема и производные от нее схемы делятся на близкие по сложности части [10, 12].

Схемно-алгебраическая функция для коэффициентов C распределения узловых токов. Электрическая сеть (рис. 1,а) с комплексными сопротивлениями и проводимостями содержит генератор ЭДС E , генераторные и нагрузочные узлы с источниками

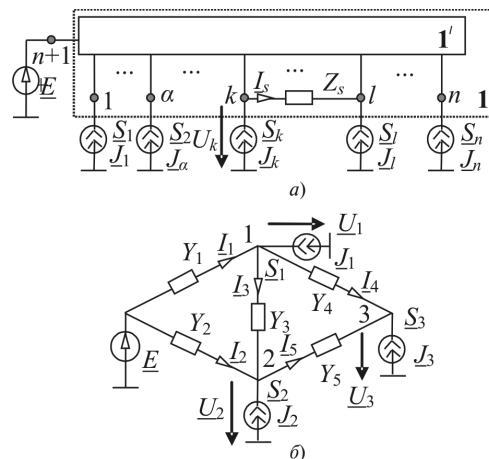


Рис. 1. Общий вид электрической сети (а); пятиузловая сеть (б)
Fig. 1. General view of the electrical network (а); five-node network (б)

ми тока $J_1, J_2, \dots, J_k, \dots, J_l, \dots, J_n$. Требуется найти символьный коэффициент C_{sa} передачи тока от источника J_a к сопротивлению Z_s .

Искомая САФ имеет вид

$$C_{sa} = I_s/J_a = \left| \begin{array}{c} \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{1'} \\ \text{1} \dots \text{a} \dots \text{k} \dots \text{l} \dots \text{n} \end{array} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{1} \\ \text{1} \dots \text{a} \dots \text{k} \dots \text{l} \dots \text{n} \end{array} \end{array} \right|, \tag{3}$$

где $||$ – определитель соответствующей схемы. Схема числителя САФ (3) получена из исходной схемы путем замены источника тока J_a норатором, а приемника тока I_s – нуллатором. Параметры остальных источников тока и ЭДС приравнены к нулю. Схема знаменателя получена также из исходной схемы путем приравнивания к нулю параметров всех источников, при этом сопротивление Z_s , последовательное с нуллатором, заменено проводником. Символьное выражение C_{sa} формируется рекурсивным выделением по МСО параметров из САФ (3).

Расчет токовых коэффициентов C для пятиузловой сети (рис. 1,б [3]). Коэффициент передачи тока от источника J_1 к проводимости Y_1 находится в соответствии с САФ (3) по формуле

$$C_{11} = I_1/J_1 = \left| \begin{array}{c} \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \end{array} \right| \tag{4}$$

Символьный коэффициент C_{11} получается с помощью разложения определителей (4) по МСО. В числителе заменим проводником (с выделением проводимости Y_1 с противоположным знаком) параллельное встречное соединение норатора и нуллатора, а параллельное соединение проводимостей Y_2 и Y_3 – суммарной проводимостью ($Y_2 + Y_3$). В знаменателе формулы (4) разделим определитель по двум узлам:

$$C_{11} = \frac{I_1}{J_1} = -Y_1 \left(\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} Y_4 \\ (Y_2+Y_3) \\ Y_5 \end{array} \right) \parallel \left(\begin{array}{c} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{array} \right) \parallel \left(\begin{array}{c} Y_4 \\ Y_5 \end{array} \right) \\ + \\ \left(\begin{array}{c} Y_1 \\ Y_2 \end{array} \right) \parallel \left(\begin{array}{c} Y_4 \\ Y_3 \\ Y_5 \end{array} \right) \end{array} \right) \quad (5)$$

Первый и третий определители в формуле (5) совпадают по структуре и находятся путем выделения проводимостей ($Y_2 + Y_3$) и Y_3 соответственно. Второй определитель равен сумме параллельных проводимостей ($Y_1 + Y_2$), четвертый – произведению $Y_1 Y_2$ и пятый – произведению $1 \cdot (Y_4 + Y_5)$ (деление по узлу):

$$C_{11} = -Y_1 [(Y_2 + Y_3)(Y_4 + Y_5) + Y_4 Y_5] / \{ (Y_1 + Y_2)[Y_3(Y_4 + Y_5) + Y_4 Y_5] + Y_1 Y_2 (Y_4 + Y_5) \}. \quad (6)$$

Коэффициент C_{11} равен соответствующему выражению в [3], но получен без трудоемкого поиска деревьев и в свернутой компактной форме. Аналогично находятся остальные коэффициенты.

При расчете сложных электрических сетей следует применять программу символьного анализа электронных цепей *CirSym*, разработанную В.В. Филаретовым [12]. Онлайн-сервис программы имеется на сайте <http://intersyn.net/cirsym.html>. С помощью программы *CirSym* получены символьные коэффициенты распределения тока для электрической сети на рис. 2 [3]. Приведем выражение для одного из коэффициентов:

$$C_{11} = \frac{I_1}{J_1} = -y_1 \{ ((y_{7c} + y_3 + y_{11})y_5((y_4 + y_{2c} + y_2)y_6(y_9 + y_{6c}) + ((y_{2c} + y_2)(y_7 + y_{3c} + y_4) + y_4(y_7 + y_{3c})))(y_9 + y_{6c} + y_6)) + ((y_{7c} + y_3)(y_{8c} + y_{11}) + y_{11}y_{8c})((y_4 + y_{2c} + y_2)y_6(y_9 + y_{6c}) + ((y_7 + y_{3c} + y_5)(y_4 + y_{2c} + y_2) + (y_{2c} + y_2)y_4) \times (y_9 + y_{6c} + y_6)) + ((y_{5c} + y_{10})(y_8 + y_{4c}) + y_{4c}y_8) + y_7((y_{7c} + y_3 + y_{11})y_5((y_4 + y_{2c} + y_2)y_6(y_9 + y_{6c}) + ((y_{2c} + y_2)(y_4 + y_{3c}) + y_{3c}y_4)(y_9 + y_{6c} + y_6)) + ((y_{7c} + y_3)(y_{8c} + y_{11}) + y_{11}y_{8c})((y_4 + y_{2c} +$$

$$+ y_2)y_6(y_9 + y_{6c}) + ((y_{2c} + y_2)(y_4 + y_{3c}) + y_{3c}y_4) \times (y_9 + y_{6c} + y_6)) + ((y_{7c} + y_3)(y_{8c} + y_{11}) + y_{11}y_{8c}) \times ((y_4 + y_{2c} + y_2)y_6(y_9 + y_{6c}) + ((y_{2c} + y_2)(y_5 + y_{3c} + y_4) + y_4(y_5 + y_{3c}))(y_9 + y_{6c} + y_6)) + ((y_8 + y_{5c} + y_{10})) / \{ ((y_{8c} + y_5 + y_{11})y_3((y_{1c} + y_1)(y_4 + y_{2c} + y_2) + y_2(y_4 + y_{2c})) + ((y_{8c} + y_5)(y_{7c} + y_{11}) + y_{11}y_{7c}) \times ((y_3 + y_{1c} + y_1)(y_4 + y_{2c} + y_2) + y_2(y_4 + y_{2c})) \} \times ((y_9 + y_{6c} + y_6)y_7((y_{5c} + y_{10})(y_8 + y_{4c}) + y_{4c}y_8) + ((y_9 + y_{6c})(y_6 + y_{3c}) + y_{3c}y_6)((y_{5c} + y_{10})(y_8 + y_7 + y_{4c}) + (y_7 + y_{4c})y_8)) + ((y_{1c} + y_1)((y_{8c} + y_{2c} + y_2)(y_{7c} + y_3 + y_{11}) + y_{11}(y_{7c} + y_3)) + (y_3 + y_2)((y_{8c} + y_{2c})(y_{7c} + y_{11}) + y_{11}y_{7c}) + y_2y_3(y_{8c} + y_{2c} + y_{7c}))y_4y_5 + ((y_{8c} + y_{11})y_3 \times ((y_{1c} + y_1)(y_{2c} + y_2) + y_2y_{2c}) + (y_{11}(y_{8c} + y_{7c}) + y_{7c}y_{8c}))((y_3 + y_{1c} + y_1)(y_{2c} + y_2) + y_2y_{2c}) \} \times (y_5 + y_4)(y_9 + y_{6c} + y_6)((y_{5c} + y_{10})(y_8 + y_7 + y_{4c}) + (y_7 + y_{4c})y_8) \}. \quad (7)$$

Числитель токового коэффициента C_{11} в формуле (7) содержит 61 и 36 аддитивных (\pm) и мультипликативных ($*$) операций (строки 3, 4 и столбец 4 в табл. 1), а числитель C_{11} по методу деревьев [3] – 2063 и 14448 соответствующих операций (строки 3, 4 и столбец 3 в табл. 1), что в 30 и 400 раз больше, чем в формуле (7). В среднем для числителей токовых коэффициентов число аддитивных и мультипликативных операций по методу деревьев в 20 и 170 раз больше, чем по МСО (табл. 1).

Схемно-алгебраическая функция для формирования символьных выражений узловых напряжений электрических сетей. Функции узловых напряжений

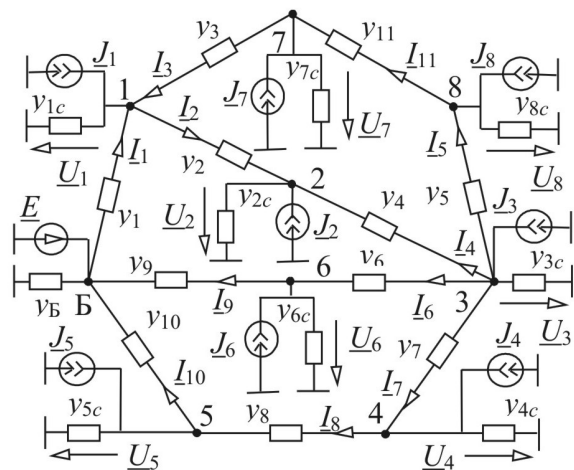


Рис. 2. Схема замещения 10-узловой электрической сети
Fig. 2. Equivalent circuit of a 10-node electrical network

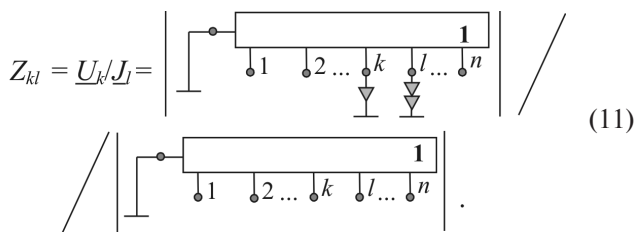
могут быть получены путем перемножения матриц: коэффициентов C распределения узловых токов, сопротивлений ветвей схемы, транспонированной матрицы C^T и вектора узловых токов [3]. Ниже предлагается простое решение.

Рассмотрим электрическую сеть на рис. 1,а. Напряжение узла k имеет вид:

$$\underline{U}_k = \frac{A(\mathbf{Z}, \mathbf{Y}, \mathbf{J}, \underline{E})}{D(\mathbf{Z}, \mathbf{Y})} = \underline{E} + \sum_{l=1}^n Z_{kl}(\mathbf{Z}, \mathbf{Y}) \underline{J}_l = \underline{E} + \frac{\sum_{l=1}^n N_{kl}(\mathbf{Z}, \mathbf{Y}) \underline{J}_l}{D(\mathbf{Z}, \mathbf{Y})}, \quad (8), (9), (10)$$

где $A(\mathbf{Z}, \mathbf{Y}, \mathbf{J}, \underline{E})$, $D(\mathbf{Z}, \mathbf{Y})$ – рациональные выражения от параметров элементов сети; \mathbf{Z} , \mathbf{Y} , \mathbf{J} – векторы сопротивлений, проводимостей и токов источников; n – число узлов с генераторными и нагрузочными токами; $Z_{kl}(\mathbf{Z}, \mathbf{Y})$ – элемент матрицы узловых сопротивлений – дробно-рациональная функция от параметров элементов сети; $N_{kl}(\mathbf{Z}, \mathbf{Y})$ – числитель для сопротивления Z_{kl} .

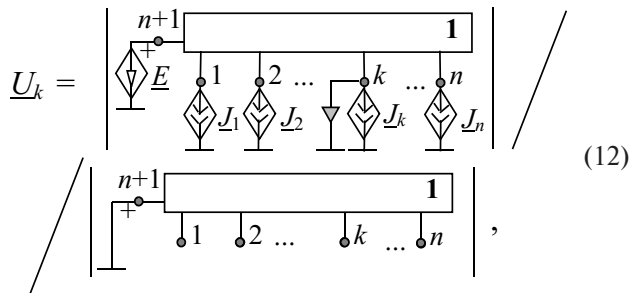
САФ передаточного сопротивления в соответст-



вии с МСО:

Числитель САФ (11) получен из схемы на рис. 1,а заменой приемника напряжения \underline{U}_k нуллатором, а источника тока \underline{J}_l – норатором противоположного направления. Токи остальных источников равны нулю. Схема знаменателя получена обнулением всех источников на рис. 1,а.

Узловое напряжение может быть сформировано на основе принципа наложения (9) и САФ (11), но более компактное выражение получается, если использовать САФ, в которой независимые источники заменены многомерным источником, управляемым нуллатором [12]. При этом САФ для напряжения k -го узла (рис. 1,а) получается в виде отношения двух схемных определителей:



где параметры управляемых источников тока и напряжения совпадают с параметрами независимых источников. Символьные выражения напряжений из САФ (11) или (12) получаются аналогично коэффициентам C_{sa} по САФ (3).

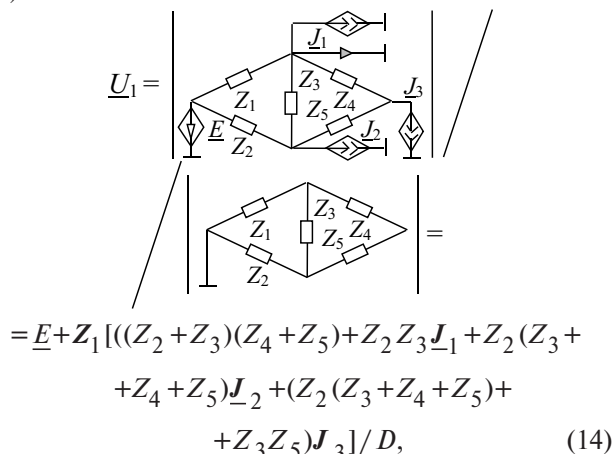
Символьно-численные выражения определяются также по (9), (11) или (12) первоочередным выделением варьируемых параметров. При n варьируемых сопротивлениях определитель в (8) или (10) имеет вид:

$$D = Z_1(Z_2 \dots (Z_n \Delta^{Z_1, Z_2, \dots, Z_n} + \Delta^{Z_1, Z_2, \dots, Z_{n-1}}) + \dots + \Delta^{Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_n}) + Z_2(Z_3 \dots (Z_n \Delta^{Z_1, Z_2, \dots, Z_n} + \Delta^{Z_1, Z_2, \dots, Z_{n-1}}) + \dots + \Delta^{Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_n}) + \dots + Z_n \Delta^{Z_1, Z_2, \dots, Z_{n-1}} + \Delta^{Z_1, Z_2, \dots, Z_n}, \quad (13)$$

где верхний и нижний индексы при Δ означают, что в частичном определителе сопротивление удалено и заменено проводником. Определители находятся численно, а варьируемые сопротивления и узловые токи остаются символами.

Пример формирования символьно-численных функций напряжений (рис. 1,б). Параметры линий заданы сопротивлениями (Ом): $Z_2 = 6,8 + j16,24$; $Z_3 = 13,5 + j21$; $Z_4 = 16,2 + j25,2$; $Z_5 = 24,3 + j37,8$ [3], ЭДС источника $\underline{E} = 115$ кВ. Найти узловые напряжения в виде функций от узловых токов и сопротивления Z_1 .

Напряжение \underline{U}_1 определяется по САФ вида (12):



где $D = Z_1(Z_3 + Z_4 + Z_5) + (Z_2 + Z_3)(Z_4 + Z_5) + Z_2 Z_3$.

В (14) САФ раскрыта по МСО аналогично САФ (4) для коэффициента C_{11} , при этом в соответствии с (13) в первую очередь выделено сопротивление Z_1 . Варьируемый параметр Z_1 , как и переменные \underline{J}_1 , \underline{J}_2 , \underline{J}_3 , записан полужирным шрифтом. На-

Таблица 1

Число вычислительных операций в числителях коэффициентов C_{kv} для электрической сети (рис. 2) по методам деревьев (Д) и схемных определителей (СО)

The number of computational operations in the numerators of the coefficients C_{kn} for the electrical network (Fig. 2) by the methods of trees (D) and circuit determinants (CO)

k	v	Д	СО	Д	СО	Д	СО	Д	СО
		1		2		3		4	
1	±	2063	61	775	35	263	17	98	14
	*	14448	36	5432	26	1848	21	693	20
2	±	1287	40	1946	45	503	22	188	19
	*	9016	27	13629	31	3528	21	1323	16
3	±	1256	36	394	32	263	17	98	14
	*	8799	27	2765	26	1848	16	693	15
4	±	511	31	2002	44	1175	30	440	28
	*	3584	25	14021	30	8232	25	3087	23
5	±	284	29	462	34	1151	24	431	44
	*	1995	24	3241	27	8064	17	3024	36
6	±	175	18	479	25	1263	24	473	21
	*	1232	21	3360	21	8848	14	3318	13
7	±	164	17	449	29	1184	23	2057	55
	*	1155	21	3150	24	8295	14	14406	36
8	±	65	17	179	20	473	21	1845	55
	*	462	16	1260	16	3318	13	12922	35
9	±	87	17	239	24	631	23	236	20
	*	616	21	1680	21	4424	14	1659	13
10	±	32	16	89	19	236	20	922	54
	*	231	20	630	16	1659	13	6461	35
11	±	497	30	302	30	455	19	170	27
	*	3486	24	2121	25	3192	15	1197	21
k	v	5		6		7		8	
1	±	32	15	87	15	806	34	356	30
	*	231	16	616	21	5649	25	2499	25
2	±	62	18	167	19	521	32	325	31
	*	441	16	1176	21	3654	24	2282	25
3	±	32	14	87	15	2039	44	751	36
	*	231	13	616	16	14280	27	5264	26
4	±	146	22	391	52	332	30	486	34
	*	1029	19	2744	47	2331	24	3409	27
5	±	143	34	383	22	772	33	2081	44
	*	1008	28	2688	17	5411	25	14574	30
6	±	157	18	1802	58	223	19	495	23
	*	1106	13	12621	39	1568	15	3472	21
7	±	685	51	394	20	209	20	464	47
	*	4802	35	2765	14	1470	16	3255	41
8	±	1608	56	157	18	83	20	185	33
	*	11263	38	1106	13	588	16	1302	28
9	±	78	17	2434	60	111	18	247	22
	*	553	13	17045	39	784	15	1736	21
10	±	2531	59	78	17	41	19	92	32
	*	17724	38	553	13	294	16	651	28
11	±	56	18	151	17	1785	42	1764	44
	*	399	16	1064	15	12502	27	12355	31

пряжения узлов 2 и 3 получаются аналогично и имеют вид:

$$\underline{U}_2 = \underline{E} + \{Z_1(Z_3 + Z_4 + Z_5)J_1 + [Z_1(Z_3 + Z_4 + Z_5) + Z_3(Z_4 + Z_5)]J_2 + [Z_1(Z_3 + Z_4 + Z_5) + Z_3Z_4]J_3\}Z_2/D;$$

$$\underline{U}_3 = \underline{E} + \{Z_1[(Z_3 + Z_4 + Z_5)Z_2 + Z_3Z_5]J_1 + [Z_1(Z_3 + Z_4 + Z_5) + Z_4Z_3]Z_2J_2 + [Z_1((Z_3 + Z_4 + Z_5)Z_2 + Z_5(Z_3 + Z_4))]J_3\}Z_2/D;$$

$$+Z_4(Z_2(Z_3 + Z_5) + Z_3Z_5)]\underline{J}_3\} / D. \quad (15)$$

При подстановке в (14) и (15) численных значений для постоянных параметров получаются символьно-численные функции напряжений (В) от узловых токов (А) и варьируемого параметра Z_1 (Ом):

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= 1,15000 \cdot 10^5 - Z_1 [(1773,210 - j3149,160)\underline{J}_1 + \\ &+ (996,960 - j1448,160)\underline{J}_2 + (1462,710 - j2468,760)\underline{J}_3] / D; \\ \underline{U}_2 &= 1,15000 \cdot 10^5 - \{Z_1(996,960 - j1448,160)\underline{J}_1 + \\ &+ [Z_1(996,960 - j1448,160) + 32902,7400 + \\ &+ j1039,5000]\underline{J}_2 + [Z_1(996,960 - j1448,160) + \\ &+ 13161,0960 + j415,8000]\underline{J}_3\} / D; \\ \underline{U}_3 &= 1,15000 \cdot 10^5 - \{Z_1(1462,710 - j2468,760)\underline{J}_1 + \\ &+ [Z_1(996,960 - j1448,160) + 13161,0960 + \\ &+ j415,8000]\underline{J}_2 + [Z_1(2021,610 - j3693,480) + \\ &+ 70115,3388 - j3632,5800]\underline{J}_3\} / D, \end{aligned} \quad (16)$$

где $D = Z_1(54,0 + j84,0) - 1773,210 + j3149,160$.

Схемно-алгебраический подход позволяет сократить число узловых уравнений представлением в виде Y -многополюсника части электрической сети, в которой не определяются напряжения узлов. Это позволит не обращаться на каждой итерации матрицу параметров замещающего многополюсника.

Вариант алгоритма расчета режима сети на основе символьно-численных функций напряжений. Алгоритм выполняется для каждого сочетания численных значений варьируемых параметров.

А. Получить по МСО с помощью САФ (9), (11) или (12) узловые напряжения \underline{U}_k в виде (16). Здесь и далее $k=1,2,\dots,n$ (рис. 1,а), при этом токи \underline{J}_k и

варьируемые параметры должны быть в символьном виде.

Б. Задать нулевые приближения для напряжений \underline{U}_k^v (итерация $v=0$).

В. Рассчитать токи источников на шаге $v=v+1$ по формуле $J_k^v = S_k^* / \underline{U}_k^{v*}$, где * – знак сопряженной комплексной переменной.

Г. Получить по формулам вида (16) узловые напряжения \underline{U}_k^v .

Д. Рассчитать мощности в узлах по формуле $S_k^v = \underline{U}_k^v J_k^v$.

Е. Если максимальная невязка мощности больше заданной невязки:

$$\chi_m = \max_{k=1,\dots,n} \frac{|S_k - S_k^v|}{S_k} > \chi_3, \text{ то перейти к п. В.}$$

Расчет режима электрической сети по символьно-численным функциям напряжений (16). В сети на рис. 1,б параметры линий заданы сопротивлениями в (Ом): $Z_1=6,6+j19,9$; $Z_2=6,8+j16,24$; $Z_3=13,5+j21$; $Z_4=16,2+j25,2$; $Z_5=24,3+j37,8$ [3]; ЭДС $E=115$ кВ.

Мощность в узлах (МВА):

$$\underline{S}_1 = 58,32596564 + j21,85563270; \quad \underline{S}_2 = -50,61743821 - j29,13208384; \quad \underline{S}_3 = -20,04047698 - j14,70262114.$$

Требуется найти узловые напряжения.

Нулевое приближение $\underline{U}_k^0 = E$. Достаточно 5 итераций (строки 2–6 в табл. 2) для получения значений напряжений с 5 верными знаками при погрешности $\varepsilon < \pm 10^{-5} \underline{U}_k$ (в строке 7 напряжения даны с 10 верными знаками).

Таблица 2

Результаты расчета напряжений в пятиузловой сети на рис. 1,б
The results of calculating the voltages in the five-node network in Fig. 1,b

№ итерации	\underline{U}_1 , В	\underline{U}_2 , В	\underline{U}_3 , В	Невязка χ_m
1	$1,155584060 \cdot 10^5 + j1817,503871$	$1,105830860 \cdot 10^5 - j1927,923883$	$1,099413469 \cdot 10^5 - j1072,863181$	0,04496670201
2	$1,152140199 \cdot 10^5 + j1782,429478$	$1,101821309 \cdot 10^5 - j1996,510635$	$1,093936016 \cdot 10^5 - j1148,243549$	$0,502887764 \cdot 10^{-2}$
3	$1,152078648 \cdot 10^5 + j1785,724435$	$1,101584258 \cdot 10^5 - j2002,705547$	$1,093603385 \cdot 10^5 - j1153,015490$	$0,307164145 \cdot 10^{-3}$
4	$1,152066011 \cdot 10^5 + j1785,509911$	$1,101565463 \cdot 10^5 - j2003,230199$	$1,093575994 \cdot 10^5 - j1153,607013$	$0,256226490 \cdot 10^{-4}$
5	$1,152065499 \cdot 10^5 + j1785,513918$	$1,101564180 \cdot 10^5 - j2003,257066$	$1,093574136 \cdot 10^5 - j1153,629209$	$0,171079786 \cdot 10^{-5}$
Напряжения с 10 знаками	$1,152065442 \cdot 10^5 + j1785,512736$	$1,101564079 \cdot 10^5 - j2003,260285$	$1,093573988 \cdot 10^5 - j1153,632836$	0

Сходимость алгоритма такая же, как и при использовании численной матрицы Z узловых сопротивлений, поскольку на одноименных итерациях получаются одинаковые значения напряжений. Отличие состоит в способе их получения — численным или символьным анализом линейных схем. Схемно-алгебраический подход может быть использован для расчета нелинейных электрических цепей и сетей при линеаризации на каждой итерации.

Символьное представление по МСО отличается высокой точностью за счет минимизации операций деления и отсутствия взаимно уничтожающихся слагаемых, обусловленных избыточностью отображения элементов в матрице. При хранении в памяти матрицы Z с варьируемыми параметрами может ускориться оптимизация режимов электрических сетей. Метод деревьев [3] из-за комбинаторного увеличения их числа не сможет конкурировать с численным решением даже в случае несложных сетей. Развернутые выражения требуют чрезмерного объема памяти и приводят к большей погрешности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кононов Ю.Г. Исследование эффективности методов расчета установившихся режимов разомкнутых распределительных электрических сетей. — Вестник Северокавказского государственного технического университета, 2005, № 1, с. 55–60.
2. Идельчик В.И. Расчеты и оптимизация режимов электрических сетей и систем. М.: Энергоатомиздат, 1988, 288 с.
3. Ахметбаев Д.С., Ахметбаев А.Д., Бердыгожин А.С. Топологический метод формирования узловых уравнений в обращенной форме для электроэнергетических систем. — Электричество, 2018, № 5, с. 18–27.
4. Дмитришин Р.В. Оптимизация электронных схем на ЭВМ. Киев: Техника, 1980, 224 с.

5. Брамеллер А., Алан Р., Хэмэм Я. Слабозаполненные матрицы. Анализ электроэнергетических систем. М.: Энергия, 1979, 192 с.

6. Гераскин О.Т. Методы определения 2 деревьев графа в топологии электрических сетей. — Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1967, № 5, с. 106–112.

7. Feussner W. Ueber Stromverzweigung in netzformigen Leitern. — Annalen der Physik, 1902, Bd 9, No. 13, s. 1304–1329.

8. Feussner W. Zur Berechnung der Stromstarke in netzformigen Leitern. — Annalen der Physik, 1904, Bd 15, No. 12, s. 385–394.

9. Теоретические основы электротехники. Т. 1. Основы теории линейных цепей/П.А. Ионкин, А.И. Даревский, Е.С. Кухаркин, В.Г. Миронов, Н.А. Мельников. М.: Высшая школа, 1976, 544 с.

10. Филаретов В.В. Синтез оптимальных формул схемных функций электрических цепей. — Электричество, 1995, № 4, с. 36–43.

11. Филаретов В.В. Топологический анализ электронных схем методом выделения параметров. — Электричество, 1998, № 5, с. 43–52.

12. Filaretov V.V., Gorshkov K.S., Kurganov S.A., Nedorezov M.V. Generalized Parameter Extraction Method for Symbolic Analysis of Analog Circuits Containing Pathological Elements. — Lect. Notes Electrical Eng., Mar. 2018, vol. 479, pp. 31–70.

13. Дьяконов В.П. Maple 10/11/12/13/14 в математических расчетах. М.: ДМК Пресс, 2011, 800 с.

14. Дьяконов В.П. Mathematica 5/6/7. Полное руководство. М.: ДМК Пресс, 2010, 624 с.

[16.11.20]



А в т о р ы: **Курганов Сергей Александрович** — доктор техн. наук, профессор, зам. заведующего кафедрой «Электроснабжение» Ульяновского государственного технического университета (УГТУ).



Филаретов Владимир Валентинович — доктор техн. наук, профессор кафедры «Электроснабжение» УГТУ.

Circuit-algebraic calculation of steady-state modes of electric networks

KURGANOV Sergey A. (Ul'yanovsk State Technical University (USTU), Ul'yanovsk, Russia) — Professor, Deputy Head of the Power Supply Dept., Dr. Sci. (Eng.)

FILARETOV Vladimir V. (USTU, Ul'yanovsk, Russia) — Professor of the Power Supply Dept., Dr. Sci. (Eng.)

In iterative algorithms for calculating the steady-state modes of AC electrical networks, it is proposed to use compact symbolic-numerical functions of nodal voltages formed by the method of circuit determinants once. These functions, due to algebraic convolution, have many times less complexity than the expanded expressions obtained by the tree method. Such functions are found by circuit-algebraic formulas in the form of a ratio of circuit determinants by allocating parameters. First of all, the conductivities (resistances) composed of a larger number of parallel (sequential) branches and incident nodes with a minimum (maximum) degree are distinguished. The original and derived schemes are recursively divided into parts that are similar in complexity. It is shown that the known computer systems for analytical calculations do not take into account the features of electrical circuits, without providing compact convolution.

Key words: *electric network, steady-state mode, symbolic-numerical functions, circuit-algebraic method, iterative calculation*

REFERENCES

1. **Kononov Yu.G.** *Vestnik Severokavkazskogo gos. tekhnicheskogo universiteta – in Russ. (Bulletin of North-Caucasus State University)*, 2005, No. 1, pp. 55–60.
2. **Idel'chik V.I.** *Raschet y optimizatsiya rezhimov elektricheskikh setey i system (Calculations and optimization of modes of electrical networks and systems)*. M.: Energoatomizdat, 1988, 288 p.
3. **Akhmetbaev D.S., Akhmetbayev A.D., Berdygozhin A.S.** *Elektrichestvo – in Russ. (Electricity)*, 2018, No. 5, pp. 18–27.
4. **Dmitrishin R.V.** *Optimizatsiya elektronnykh skhem na EVM (Optimization of electronic circuits on a computer)*. Kiyev: Tekhnika, 1980, 224 p.
5. **Brameller A., Alan R., Khemem Ya.** *Slabozapolnennyye matritsy. Analiz elektroenergeticheskikh sistem (Weakly filled matrices. Analysis of electrical power systems)*. M.: Energiya, 1979, 192 p.
6. **Geraskin O.T.** *Izv. AN SSSR. Energetika i transport – in Russ. (News of Academy of Science of the USSR. Energy and Transport)*, 1967, No. 5, pp. 106–112.
7. **Feussner W.** Ueber Stromverzweigung in netzformigen Leitern. — *Annalen der Physik*, 1902, Bd 9, No. 13, s. 1304–1329.
8. **Feussner W.** Zur Berechnung der Stromstarke in netzformigen Leitern. — *Annalen der Physik*, 1904, Bd 15, No. 12, s. 385–394.
9. **Teoreticheskiye osnovy elektrotekhniki. T. 1. Osnovy teorii lineynykh tsepey/P.A. Ionkin, A.I. Darevskiy, Ye.S. Kukharkin, V.G. Mironov, N.A. Mel'nikov (Theoretical foundations of electrical engineering. V. 1. Foundations of the theory of linear circuits/P.A. Ionkin, A.I. Darevsky, E.S. Kukharkin, V.G. Mironov, N.A. Melnikov)**. M.: Vysshaya shkola, 1976, 544 p.
10. **Filaretov V.V.** *Elektrichestvo – in Russ. (Electricity)*, 1995, No. 4, pp. 36–43.
11. **Filaretov V.V.** *Elektrichestvo – in Russ. (Electricity)*, 1998, No. 5, pp. 43–52.
12. **Filaretov V.V., Gorshkov K.S., Kurganov S.A., Nedorezov M.V.** Generalized Parameter Extraction Method for Symbolic Analysis of Analog Circuits Containing Pathological Elements. — *Lect. Notes Electrical Eng.*, Mar. 2018, vol. 479, pp. 31–70.
13. **D'yakonov V.P.** *Maple 10/11/12/13/14 v matematicheskikh raschetakh (Maple 10/11/12/13/14 in mathematical calculations)*. M.: DMK Press, 2011, 800 p.
14. **D'yakonov V.P.** *Mathematica 5/6/7. Polnoye rukovodstvo (Mathematica 5/6/7. Complete guide)*. M.: DMK Press, 2010, 624 p.

[16.11.20]