

К общей теории анализа субгармонических колебаний в трехфазных феррорезонансных цепях и системах

ИБАДУЛЛАЕВ М.

ТГТУ, Ташкент, Узбекистан

ТОВБАЕВ А.Н.

НГГИ, Навои, Узбекистан

ЕСЕНБЕКОВ А.Ж.

КарГУ, Нукус, Узбекистан

Изложена общая теория анализа субгармонических колебаний на частоте $\omega/3$ в трехфазных феррорезонансных цепях. Возникновение и существование феррорезонансных колебаний на частотах субгармоник в линиях электропередачи и системах электроснабжения крайне нежелательны, так как они вызывают перенапряжения на различных частотах. Вместе с тем существует обширный класс нелинейных электрических цепей, в которых возбуждение автопараметрических колебаний на частоте субгармоник составляет основу фазодискретных частотно-преобразующих устройств, служащих вторичными источниками питания. Для изучения закономерностей возбуждения и поддержания субгармонических колебаний на частоте $\omega/3$ в трехфазных феррорезонансных цепях были проведены теоретические и экспериментальные исследования эквивалентной модели трехфазной цепи с нелинейной индуктивностью. Выведено обобщенное нелинейное дифференциальное уравнение для трехфазной цепи со смешанно соединенными элементами. Проведен анализ установившегося режима субгармонических колебаний на частоте $\omega/3$ с использованием метода малого параметра (усреднения), позволивший определить области их существования и критические параметры цепи. Разработаны математическая модель и алгоритм расчета автопараметрических колебаний для исследования процессов возбуждения субгармонических колебаний на частоте $\omega/3$ в трехфазных феррорезонансных цепях в зависимости от начальных условий, параметров цепи и входного напряжения. Результаты теоретических исследований подтверждены экспериментально.

К л ю ч е в ы е с л о в а: феррорезонанс, автоколебания, субгармоника, субгармонические колебания, аппроксимация, малые параметры, ферромагнитный элемент

Электроэнергетические системы в большом количестве содержат элементы, обладающие значительной индуктивностью (генераторы, трансформаторы, реакторы и т.д.). С другой стороны, линии электропередачи (ЛЭП) обладают емкостью относительно земли и между фазами. Часто для регулирования напряжения и повышения устойчивости параллельной работы синхронных генераторов в линию включаются дополнительные реакторы и емкости, комбинация которых вызывает ряд сложных нелинейных колебательных процессов [1–3, 9, 10]. В нормальном режиме работы системы емкости и индуктивности шунтированы нагрузкой или непосредственно присоединены к зажимам мощного источника. При различных коммутациях в системе часть колебательных контуров может перевозбуждаться, и в них развиваются колебания, приводящие к существенным перенапряжениям [1–4, 7–15].

Экспериментально и аналитически исследованы субгармонические колебания (СГК) в однофазных

двухконтурных электроферромагнитных цепях. Количественным и качественным оценкам СГК в зависимости от параметров цепи и приложенного воздействия посвящен ряд работ [2–4, 8, 10, 11], в которых даются рекомендации по эксплуатации и проектированию ЛЭП, направленные на уменьшение их аварийности, а также по разработке устройств преобразователей частоты переменного тока.

Анализ условий возбуждения субгармонических режимов трехфазных нелинейных систем в зависимости от параметров цепи и приложенного воздействия позволяет выявить основные закономерности перенапряжений в ЛЭП и возможные мероприятия по предотвращению или снижению их до допустимых значений.

Несмотря на множество публикаций, посвященных СГК в трехфазных феррорезонансных цепях, процессы, происходящие в них, освещены на основе экспериментальных данных, а теоретический анализ проведен для однофазного аналога трехфазной цепи,

искажающего количественную и качественную стороны процесса. Это объясняется сложностью решения нелинейных систем неоднородных дифференциальных уравнений, правая часть которых имеет фиксированные сдвиги фаз.

В трех- и многофазных электроферромагнитных цепях условия возбуждения и поддержания автопараметрических колебаний (АПК) зависят еще от структуры цепи и способа соединения ее элементов, а также нелинейного взаимодействия ферромагнитных элементов в фазах. В общем случае СГК $\omega/3$ -порядка m -фазной системы образуют ряд сочетаний несимметричных векторов, отличающихся фазовыми сдвигами $\varphi = \frac{(v-1)2\pi}{mn}$ [7, 12].

Условия возбуждения и характер протекания процессов АПК в феррорезонансной цепи зависят в основном от параметров цепи, от степени нелинейности индуктивности, начальных условий, амплитуды и фазы входного воздействия [1, 9–12].

Вывод обобщенных дифференциальных уравнений трехфазных феррорезонансных цепей. Многофазные феррорезонансные цепи состоят из линейной емкости, активного сопротивления и нелинейных ферромагнитных элементов. На рис. 1 приведена трехфазная цепь со смешанно соединенными элементами, соединенная в звезду.

Составим уравнения для трехфазной феррорезонансной цепи (рис. 1) с нулевым и без нулевого провода. Обобщенное уравнение по законам Кирхгофа в матричной форме [7, 8, 12]:

$$u_v = \mathbf{R}^* i + \mathbf{D}^* \int i dt + w \mathbf{A}^* \Phi. \quad (1)$$

По замкнутым контурам через нейтральный провод и C_0 :

$$\mathbf{A} \Phi + \mathbf{R}_0 i_0 + \mathbf{D} \int i dt = 0, \quad (2)$$

где

$$\mathbf{R}^* = \begin{bmatrix} R_1 & -R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & -R_3 \\ -R_1 & 0 & R_3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} C_1^{-1} & -C_2^{-1} & 0 \\ 0 & C_2^{-1} & -C_3^{-1} \\ C_1^{-1} & 0 & C_3^{-1} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R}_0 = \begin{bmatrix} R_0 & 0 & 0 \\ 0 & R_0 & 0 \\ 0 & 0 & R_0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{D}_0 = \begin{bmatrix} C_0^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & C_0^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & C_0^{-1} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} -$$

порядок квадратных матриц v (v – число фаз); $u_v, i, \int i dt, \Phi$ – соответственно симметричный трехфазный источник напряжения с матричными столбцами мгновенных значений линейных напряжений, всех токов сети, интегралов тока всех фаз и производной магнитного потока каждого сердечника трехфазного ферромагнитного элемента; R_1, R_2, R_3 – активные сопротивления; C_1, C_2, C_3 – емкости.

Ток нейтрального провода может быть определен выражением:

$$i_1 + i_2 + i_3 = i_0 = i_{C1} + i_{C2} + i_{C3}, \quad (3)$$

токи в узлах определяются по закону Кирхгофа:

$$\begin{aligned} i_A + i_{C1} - i_1 &= 0 \quad \text{или} \quad i_{C1} = i_1 - i_A; \\ i_B + i_{C2} - i_2 &= 0 \quad \text{или} \quad i_{C2} = i_2 - i_B; \\ i_C + i_{C3} - i_3 &= 0 \quad \text{или} \quad i_{C3} = i_3 - i_C \end{aligned} \quad (4)$$

где i_A, i_B, i_C – линейные токи; i_{C1}, i_{C2}, i_{C3} – емкостные токи параллельных ветвей; i_0 – ток нейтрального провода.

Продифференцировав уравнение (2) с учетом (3), имеем:

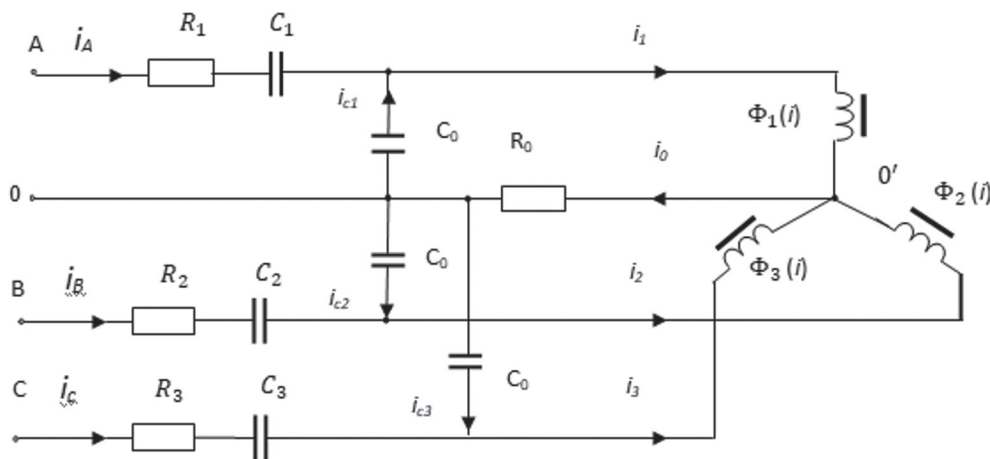


Рис. 1. Симметричная трёхфазная цепь со смешанно-соединенными элементами

Fig. 1. Symmetrical three-phase circuit with mixed-connected elements

$$\frac{1}{C_{0v}}(i_{c_1} + i_{c_2} + i_{c_3}) + R_0 \frac{d(i_1 + i_2 + i_3)}{dt} + \frac{d^2(\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3)}{dt^2} = 0, \quad (5)$$

где C_{0v} – поперечные емкости; $i_{c_1}, i_{c_2}, i_{c_3}$ – емкостные токи параллельных ветвей; Φ_1, Φ_2, Φ_3 – магнитные потоки ферромагнитных элементов; i_0 – ток нейтрального провода; R_0 – сопротивление нейтрального провода.

Токи, протекающие через конденсатор C_0 :

$$i_{c_v} = -R_0 D_0^* \frac{di_0}{dt} - D_0^* \ddot{\Phi}_v, \quad (6)$$

где $v = 1-3$ – порядок фаз.

Из (3) с учетом (4) токи, протекающие через конденсаторы C_{0v} :

$$\begin{aligned} i_{c_1} &= -R_0 C_1 \frac{di_0}{dt} - C_1 \frac{d^2 \Phi_1}{dt^2}; \\ i_{c_2} &= -R_0 C_2 \frac{di_0}{dt} - C_2 \frac{d^2 \Phi_2}{dt^2}; \\ i_{c_3} &= -R_0 C_3 \frac{di_0}{dt} - C_3 \frac{d^2 \Phi_3}{dt^2}. \end{aligned} \quad (6a)$$

В (1), последовательно вычитая уравнения смежных фаз с учетом (3) и (4), после некоторых преобразований получим:

$$\begin{aligned} RC_0 \frac{d^3 \Phi_v}{dt^3} + \frac{d^2 \Phi_v}{dt^2} + \frac{C_0}{C} \frac{d^2 \Phi_v}{dt^2} - \frac{1}{3} \sum_{n=1}^3 \frac{d^2 \Phi_n}{dt^2} + RR_0 C_0 \sum_{n=1}^3 \frac{d^2 i_n}{dt^2} + \\ + R_0 \frac{C_0}{C} \sum_{n=1}^3 \frac{di_n}{dt} + R \frac{di_v}{dt} + \frac{1}{C} i_v = \\ = \omega U_m \cos \left[\omega t + \varphi - \frac{(v-1)2\pi}{3} \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Аппроксимируя нелинейную вебер-амперную характеристику ферромагнитных элементов в виде кубического полинома [7, 8, 12], получим:

$$i_v = \alpha \Phi_v + \beta \Phi_v^3, \quad (8)$$

где α и β – коэффициенты аппроксимации.

Подставив (8) в (7), после преобразования получим нелинейное дифференциальное уравнение состояния трехфазной феррорезонансной цепи:

$$\begin{aligned} RC_0 \frac{d^3 \Phi_v}{dt^3} + \frac{d^2 \Phi_v}{dt^2} + \frac{C_0}{C} \frac{d^2 \Phi_v}{dt^2} - \frac{1}{3} \sum_{n=1}^3 \frac{d^2 \Phi_n}{dt^2} + \\ + RR_0 C_0 \sum_{n=1}^3 \left[\alpha \frac{d^2 \Phi_n}{dt^2} + 6\beta \Phi_n \left(\frac{d\Phi_n}{dt} \right)^2 + \right. \\ \left. + 3\beta \Phi_n^2 \frac{d^2 \Phi_n}{dt^2} \right] + \\ + R_0 \frac{C_0}{C} \sum_{n=1}^3 \left(\alpha \frac{d\Phi_n}{dt} + 3\beta \Phi_n^2 \frac{d\Phi_n}{dt} \right) + \\ + R\alpha \frac{d\Phi_v}{dt} + 3R\beta \Phi_v^2 \frac{d\Phi_v}{dt} + \\ + \frac{\alpha}{C} \Phi_v + \frac{\beta}{C} \Phi_v^3 = \omega U_{mv} \cos \left[\omega t + \varphi - \frac{(v-1)2\pi}{3} \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Уравнение (9) является обобщенным нелинейным дифференциальным уравнением трехфазной феррорезонансной цепи со смешанно соединенными элементами с нулевым проводом [12].

При отсутствии поперечных емкостей ($C_0 = 0$) трехфазная схема (рис. 1) преобразуется в симметричную трехфазную феррорезонансную цепь с последовательно соединенными элементами с изолированной нейтралью, описываемой системой дифференциальных уравнений:

$$\mathbf{A} \ddot{\Phi}_v + \mathbf{R}_0 \frac{di_0}{dt} + \mathbf{R}' \frac{di_v}{dt} = \omega U_m \cos \left(\omega t - 2\pi \frac{(v-1)}{3} \right), \quad (10)$$

где $v = 1-3$ – порядок фаз.

Ток нейтрального провода в дифференциальном виде:

$$\frac{di_0}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} + \frac{di_3}{dt}, \quad (11)$$

где

$$\mathbf{R}' = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R}_0 = \begin{bmatrix} R_0 & 0 & 0 \\ 0 & R_0 & 0 \\ 0 & 0 & R_0 \end{bmatrix}; \quad (12)$$

Φ_v – потоки ферромагнитных элементов; i_v – фазные токи; R_0 – активное сопротивление нейтрали; $R_{1,2,3}, C_{1,2,3}$ – активное сопротивление и емкость каждой фазы.

Из (10) с учетом (8) получим систему нелинейных дифференциальных уравнений для схемы с изолированной нейтралью и последовательно соединенными элементами:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Phi_v}{dt^2} + R_0 \alpha \sum_{n=1}^3 \frac{d\Phi_n}{dt} + \frac{\alpha}{C} \Phi_v + \frac{\beta}{C} \Phi_v^3 + 3\beta R_0 \times \\ \times \sum_{n=1}^3 \Phi_n^2 \frac{d\Phi_n}{dt} + 3\beta R \Phi_v^2 \frac{d\Phi_v}{dt} + \\ + R\alpha \frac{d\Phi_v}{dt} = \omega U_{mv} \cos \left(\omega t + \varphi - \frac{2\pi(v-1)}{3} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Аналогично выводится нелинейное дифференциальное уравнение для симметричной трехфазной феррорезонансной цепи с последовательно соединенными элементами без нулевого провода:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2\Phi_v}{dt^2} - \frac{1}{3} \sum_{n=1}^3 \frac{d\Phi_n}{dt} + R\alpha \frac{d\Phi_v}{dt} + \\ & + 3R\beta\Phi_v^2 \frac{d\Phi_v}{dt} + \frac{\alpha}{C}\Phi_v + \frac{\beta}{C}\Phi_v^3 = \quad (14) \\ & = \omega U_{m_v} \cos \left[\omega t + \varphi - \frac{(v-1)2\pi}{3} \right]. \end{aligned}$$

Полученные обобщенные нелинейные дифференциальные уравнения движения для симметричных трехфазных базовых феррорезонансных цепей позволяют рассматривать процесс возбуждения АПК на различных частотах как в установившихся, так и в переходных режимах.

Анализ стационарного режима СГК $\omega/3$. Автопараметрические процессы в трехфазных феррорезонансных цепях характеризуются многообразием и сложностью их исследования.

С точки зрения теории нелинейных электрических цепей исследование условий возбуждения АПК и их устойчивости, а также изучение основных закономерностей АПК на соответствующих частотах воздействия представляют важную практическую задачу в области энергетики и преобразовательной техники.

Рассмотрим процесс возбуждения и существование СГК $\omega/3$ в схемах с последовательно соединенными элементами, имеющих изолированную нейтраль.

Учитывая фазовые соотношения для трехфазной цепи субгармонического режима $\omega/3$ методом малого параметра (усреднения) [5], получены укороченные уравнения, описывающие динамику системы.

Нелинейные дифференциальные уравнения трехфазной электроферромагнитной цепи с нулевым проводом (12) после перехода к новому времени $t = 3\tau/\omega$ представим в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2\Phi_v}{d\tau^2} + \delta_0 \sum_{n=1}^3 \frac{d\Phi_n}{d\tau} + h_0 \sum_{m=1}^3 \Phi_m^2 \frac{d\Phi_m}{d\tau} + \\ & + \mu h \Phi_v^2 \frac{d\Phi_v}{d\tau} + \delta \frac{d\Phi_v}{d\tau} + k_0 \Phi_v + k\mu \Phi_v^3 = \quad (15) \\ & = G \cos \left[3\tau + \varphi - \frac{(v-1)2\pi}{3} \right], \end{aligned}$$

где μ – малый параметр ($0 < \mu < 1$);

$$\begin{aligned} \delta_0 &= \frac{3R_0\alpha}{\omega}; \delta = \frac{3R\alpha}{\omega}; h_0 = \frac{3R_0\beta}{\omega}; h = \frac{3R\beta}{\omega}; \\ k_0 &= \frac{9\alpha}{\omega^2 C}; k = \frac{9\beta}{\omega^2 C}; G = \frac{9U_m}{\omega}; \tau = \frac{\omega t}{3}. \quad (16) \end{aligned}$$

Следует отметить, что последовательность фаз СГК и фазовые сдвиги между смежными фазами трехфаз-

ной системы СГК находятся в различных сочетаниях. В частности, при $q = 1$ эти сдвиги составляют 0, 40, 80°, что соответствует прямому следованию фаз по СГК третьего порядка. При $q = 2$ они равны 0, 80, 160 и 0, 160, 360° (0, 40, 160°), что соответствует обратному следованию фаз.

Пользуясь методом Боголюбова–Митропольского [5] и принимая во внимание фазовые соотношения $\varphi = [(v-1)2\pi]/m$ для трех вариантов сдвига фаз по субгармонике, уравнения (15) решаем в виде:

$$\Phi_v = \Phi_{v_3} e^{-j\left[\tau - \frac{(v-1)2\pi q}{9}\right]} + \Phi_{v_e} e^{-j\left[3\tau - \frac{(v-1)2\pi q}{3}\right]} + \mu W_{v(\tau)}. \quad (17)$$

где q – порядок следования фаз ($q = 1, 2$); Φ_v и Φ_{v_3} – медленно меняющиеся комплексные амплитуды основных и субгармонических колебаний; W_v – ограниченная функция порядков Φ_v и Φ_{v_3} .

Подставив (17) в (15) и пренебрегая членами порядка μ^2 , после интегрирования по частоте ω и $\omega/3$ получим для $q = 2$ укороченные уравнения для каждой фазы трехфазной цепи с нулевым проводом в комплексных амплитудах:

$$\begin{aligned} & 2j\dot{\Phi}_{13} + \xi\Phi_{13} + j\delta\Phi_{13} - \\ & - k(3\Phi_{13}^2\bar{\Phi}_{13} + 6\Phi_{13}\Phi_1\bar{\Phi}_1 + 3\bar{\Phi}_{13}^2\Phi_1) + \\ & + j\delta_0(1 + e^{j160^\circ} + e^{j40^\circ})\Phi_{13} = 0; \\ & 6j\dot{\Phi}_1 + \xi\Phi_1 + 3j\delta\Phi_1 - \\ & - k(3\Phi_1^2\bar{\Phi}_1 + 6\Phi_1\Phi_{13}\bar{\Phi}_{13} + \bar{\Phi}_{13}^3) = 0; \\ & 2j\dot{\Phi}_{23} + \xi\Phi_{23} + j\delta\Phi_{23} - \\ & - k(3\Phi_{23}^2\bar{\Phi}_{23} + 6\Phi_{23}\Phi_2\bar{\Phi}_2 + 3\bar{\Phi}_{23}^2\Phi_2) + \\ & + j\delta_0(e^{-j160^\circ} + 1 + e^{j40^\circ})\Phi_{23} = 0; \quad (18) \\ & 6j\dot{\Phi}_2 + \xi\Phi_2 + 3j\delta\Phi_2 - \\ & - k(3\Phi_2^2\bar{\Phi}_2 + 6\Phi_2\Phi_{23}\bar{\Phi}_{23} + \bar{\Phi}_{23}^3) = 0; \\ & 2j\dot{\Phi}_{33} + \xi\Phi_{33} + j\delta\Phi_{33} - \\ & - k(3\Phi_{33}^2\bar{\Phi}_{33} + 6\Phi_{33}\Phi_3\bar{\Phi}_3 + 3\bar{\Phi}_{33}^2\Phi_3) + \\ & + j\delta_0(e^{-j160^\circ} + e^{-j40^\circ} + 1)\Phi_{33} = 0; \\ & 6j\dot{\Phi}_3 + \xi\Phi_3 + 3j\delta\Phi_3 - k(3\Phi_3^2\bar{\Phi}_3 + \\ & + 6\Phi_3\Phi_{33}\bar{\Phi}_{33} + \bar{\Phi}_{33}^3) = 0. \end{aligned}$$

Перейдем от комплексных величин к действительным амплитудам и фазам:

$$\begin{aligned} \Phi_{v_3} &= \Phi_{v_3} e^{j\varphi_{v_3}}; \bar{\Phi}_{v_3} = \Phi_{v_3} e^{-j\varphi_{v_3}}; \\ \Phi_v &= \Phi_v e^{j\varphi_v}; \bar{\Phi}_v = \Phi_v e^{-j\varphi_v}. \quad (19) \end{aligned}$$

Из (18) и (19) получим:

$$\begin{aligned}
 3\dot{\Phi}_1 &= -3\delta\Phi_1 + k\Phi_{13}^3 \sin(\varphi_1 - 3\varphi_{13}); \\
 3\Phi_1\dot{\varphi}_1 &= \xi\Phi_1 - k(\Phi_1^3 + 2\Phi_1\Phi_{13}^2) - \\
 &- 3k\Phi_{13} \cos(\varphi_1 - 3\varphi_{13}); \\
 3\dot{\Phi}_2 &= -3\delta\Phi_2 + k\Phi_{23}^3 \sin(\varphi_2 - 3\varphi_{23}); \\
 3\Phi_2\dot{\varphi}_2 &= \xi\Phi_2 - k(\Phi_2^3 + 2\Phi_2\Phi_{23}^2) - \\
 &- 3k\Phi_{23} \cos(\varphi_2 - 3\varphi_{23}); \\
 3\dot{\Phi}_3 &= -3\delta\Phi_3 + k\Phi_{33}^3 \sin(\varphi_3 - 3\varphi_{33}); \\
 3\Phi_3\dot{\varphi}_3 &= \xi\Phi_3 - k(\Phi_3^3 + 2\Phi_3\Phi_{33}^2) - \\
 &- 3k\Phi_{33} \cos(\varphi_3 - 3\varphi_{33}).
 \end{aligned} \tag{20}$$

Дифференцирование уравнений (20) выполнено по времени $\tau/3$.

Установившийся режим СГК третьего порядка определяем из (20), приравняв к нулю производные:

$$\dot{\Phi}_{v3} = 0; \quad \dot{\varphi}_{v3} = 0; \quad \dot{\Phi}_{v1} = 0; \quad \dot{\varphi}_{v1} = 0.$$

В результате получим уравнения для амплитудно-частотных характеристик системы. Теперь режим $\Phi_{v3} \neq 0$ определяется из (20). В случае трехфазной феррорезонансной цепи с нулевым проводом:

$$\begin{aligned}
 \delta + 0,82\delta_0 &= 3k\Phi_{13}\Phi_1 \sin(3\varphi_{13} - \varphi_1); \\
 -\xi + 0,3\delta_0 - k(3\Phi_{13}^2 + 6\Phi_1^2) &= 3k\Phi_{13}\Phi_1 \cos(3\varphi_{13} - \varphi_1); \\
 \delta + 0,82\delta_0 &= 3k\Phi_{23}\Phi_2 \sin(3\varphi_{23} - \varphi_2); \\
 -\xi + 0,3\delta_0 - k(3\Phi_{23}^2 + 6\Phi_2^2) &= 3k\Phi_{23}\Phi_2 \cos(3\varphi_{23} - \varphi_2); \\
 \delta + 0,82\delta_0 &= 3k\Phi_{33}\Phi_3 \sin(3\varphi_{33} - \varphi_3); \\
 -\xi - k(3\Phi_{33}^2 + 6\Phi_3^2) &= 3k\Phi_{33}\Phi_3 \cos(3\varphi_{33} - \varphi_3).
 \end{aligned} \tag{21}$$

Для определения амплитуды СГК в зависимости от параметров системы и приложенного воздействия возведем уравнения (21) в квадрат и сложим их. Проведя замену $\Phi_{v3}^2 = y_v$, $\Phi_{v1}^2 = x_v$, получим уравнения кривых второго порядка [6]:

$$\begin{aligned}
 36x_1^2 + 9y_1^2 + 27x_1y_1 + 12\frac{-\delta - 0,3\delta_0}{k}x_1 + \\
 + 6\frac{-\xi - 0,3\delta_0}{k}y_1 + \frac{(\delta + 0,82\delta_0)^2}{k^2} - \frac{(-\xi - 0,3\delta_0)^2}{k^2} &= 0; \\
 36x_2^2 + 9y_2^2 + 27x_2y_2 + 12\frac{-\delta + 0,3\delta_0}{k}x_2 + \\
 + 6\frac{-\xi + 0,3\delta_0}{k}y_2 + \frac{(\delta + 0,82\delta_0)^2}{k^2} - \frac{(-\xi + 0,3\delta_0)^2}{k^2} &= 0; \\
 36x_3^2 + 9y_3^2 + 27x_3y_3 + 12\frac{-\xi}{k}x_3 + \\
 + 6\frac{-\xi}{k}y_3 + \frac{(\delta + 0,867\delta_0)^2}{k^2} - \frac{-\xi^2}{k^2} &= 0.
 \end{aligned} \tag{22}$$

Инварианты для (22) равны [6, 8]:

$$\begin{aligned}
 \Delta_1 &= 142 \left[\left(\delta + \frac{0,82\delta_0}{k^2} \right)^2 - 0,14 \left(\frac{-\xi - 0,3\delta_0}{k^2} \right)^2 \right]; \\
 \Delta_2 &= 142 \left[\left(\delta + \frac{0,82\delta_0}{k^2} \right)^2 - 0,14 \left(\frac{-\xi + 0,3\delta_0}{k^2} \right)^2 \right]; \\
 \Delta_3 &= 142 \left[\left(\delta + \frac{0,867\delta_0}{k^2} \right)^2 - 0,14 \left(\frac{-\xi}{k^2} \right)^2 \right].
 \end{aligned} \tag{23}$$

Из (23) следуют инварианты уравнений кривых второго порядка $f_v = 142$ и $s_v = 45$ – постоянные положительные числа. Если $\Delta_v/f_v < 0$, то уравнения (23) описывают действительные эллипсы (рис.2), т.е. положительному значению квадратов амплитуды основной гармоники Φ_v^2 соответствует положительное значение квадратов амплитуды СГК Φ_{v3}^2 , т.е. эллипсы находятся в первом квадранте: $X_y > 0$; $Y_y > 0$.

Из (23) координаты центров эллипсов будут:

$$\begin{aligned}
 x_{10} &= \frac{13,5}{142k}(\xi - 0,3\delta_0) > 0; \quad y_{10} = 2x_1 > 0; \\
 x_{20} &= \frac{13,5}{142k}(\xi + 0,3\delta_0) > 0; \quad y_{20} = 2x_2 > 0; \\
 x_{30} &= \frac{13,5}{142k}\xi > 0; \quad y_{30} = 2x_3 > 0.
 \end{aligned} \tag{24}$$

Из (24) следует, что координаты центра эллипса будут смещаться с изменением параметров цепи, а эллипсы повернуты относительно осей координат на угол $\text{tg}2\alpha = 2b/ac = 1$, не зависящий от параметров цепи и равный $22^\circ 30'$ для всех трех фаз. Длина полуосей эллипсов выражается:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \sqrt{-\frac{1}{3,5} \left[\left(\frac{\delta + 0,82\delta_0}{k} \right)^2 - \left(\frac{\xi - 0,82\delta_0}{k} \right)^2 \right] 0,14}, \\
 a_1^2 &= 0,082a_1^2; \\
 a_2 &= \sqrt{-\frac{1}{3,5} \left[\left(\frac{\delta + 0,82\delta_0}{k} \right)^2 - \left(\frac{\xi + 0,82\delta_0}{k} \right)^2 \right] 0,14}, \\
 a_2^2 &= 0,082a_2^2; \\
 a_3 &= \sqrt{-\frac{1}{3,5} \left[\left(\frac{\delta + 0,862\delta_0}{k} \right)^2 + \left(\frac{\xi}{k} \right)^2 \right] 0,14}, \\
 a_3^2 &= 0,082a_3^2.
 \end{aligned} \tag{25}$$

Отношение полуосей эллипсов постоянно, поэтому при изменении параметров цепи эллипсы остаются подобными.

С увеличением расстройки ξ координаты центра и длина полуоси эллипсов увеличиваются, т.е. увеличивается область существования СГК.

Определение критических параметров СГК $\omega/3$.

Из (23) следует, что для существования СГК в системе необходимо, чтобы координаты центра и параметры эллипсов были положительными:

$$\begin{aligned} (\xi - 0,3\delta_0)^2 - 7(\delta + 0,8\delta_0)^2 &\geq 0; \\ (\xi + 0,3\delta_0)^2 - 7(\delta + 0,82\delta_0)^2 &\geq 0; \\ \xi^2 - 7(\delta + 0,867\delta_0)^2 &\geq 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Критические значения расстройки в системе, при которых возбуждаются СГК третьего порядка:

$$\begin{aligned} \text{фаза } A: \xi_{1,2\text{кр}} &= 0,3\delta_0 \pm \sqrt{4,54\delta_0^2 + 7,1\delta^2 + 11,48\delta\delta_0}; \\ \text{фаза } B: \xi_{1,2\text{кр}} &= -0,3\delta_0 \pm \sqrt{4,54\delta_0^2 + 7,1\delta^2 + 11,48\delta\delta_0}; \\ \text{фаза } C: \xi_{1,2\text{кр}} &= 2,63(\delta + 0,867\delta_0). \end{aligned} \quad (27)$$

Из (27) следует, что если сопротивление нулевого провода равно нулю ($\delta_0 = 0$), то условия существования СГК для всех трех фаз одинаковы и равны:

$$\xi_{1,2v} = 2,63\delta_v, \quad (28)$$

где $v = 1-3$.

При этом отсутствует взаимное влияние одной фазы на другую, и субгармонический режим в трехфазной системе можно установить для каждой фазы в отдельности.

В режиме $\delta = 0$ и $\delta_0 \neq 0$:

$$\begin{aligned} \text{Фаза } A: \xi_{1,2} &= 2,42\delta_0; \text{ Фаза } B: \xi_{1,2} = 1,82\delta_0; \\ \text{Фаза } C: \xi_{1,2} &= 2,3\delta_0. \end{aligned} \quad (29)$$

На рис. 2 приведены расчетные зависимости квадратов амплитуды СГК от квадратов амплитуды входного воздействия при вариациях параметров системы соответствующей области существования СГК (коэффициенты нелинейной индуктивности $\alpha = 1,2; \beta = 0,8$ и при $R = 5$ Ом, $C = 80-160$ мкФ).

Как следует из рис. 2, с увеличением ξ возрастают субгармонические составляющие магнитного потока Φ и область их существования становится шире, а при достижении критического значения $\xi_{\text{кр}}$ происходит срыв колебаний. Из (27) следует, что область существования СГК ограничивается некоторыми максимальными и минимальными значениями ёмкости (расстройки) (рис. 2). Если сопротивление нулевого провода $R_0 = 0$ ($\delta_0 = 0$), то амплитуды СГК в трех фазах одинаковы, а с увеличением R_0 они становятся различными.

В первой фазе A при увеличении сопротивления нулевого провода субгармонические составляющие магнитного потока уменьшаются, тогда как в двух других фазах увеличиваются. Когда R_0 достигает некоторого критического значения, координаты центра эллипсов также стягиваются к нулю, что соответствует срыву СГК. С ростом R цепи сужается область существования СГК, при этом амплитуда СГК в одной фазе уменьшается, а в двух других увеличивается. Когда сопротивление в первой, второй и третьей фазах достигает некоторого критического значения $\delta_{\text{кр}}$ ($R_{\text{кр}} = 15$ Ом), то координаты центра эллипсов становятся нулевыми ($x, y = 0$), что соответствует срыву колебаний во всех трех фазах. Здесь семейство кривых построено при $R_0 = 2$ Ом, $C = 120$ мкФ, $R = 0-15$ Ом.

Анализ СГК в трехфазных феррорезонансных цепях с использованием компьютерного моделирования. Анализ системы нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих трехфазную феррорезонансную цепь с применением качественного метода (метод усреднения), позволил определить области существования и критические значения параметров цепи с учетом фазовых соотношений субгармоник $\omega/3$.

Однако исследование процесса возбуждения СГК в трехфазных феррорезонансных цепях в зависимости от начальных условий и изучение характера протекания переходного процесса представляют сложную задачу.

Для решения данной задачи составлен алгоритм расчета, реализованный в пакете MATLAB. Введя в

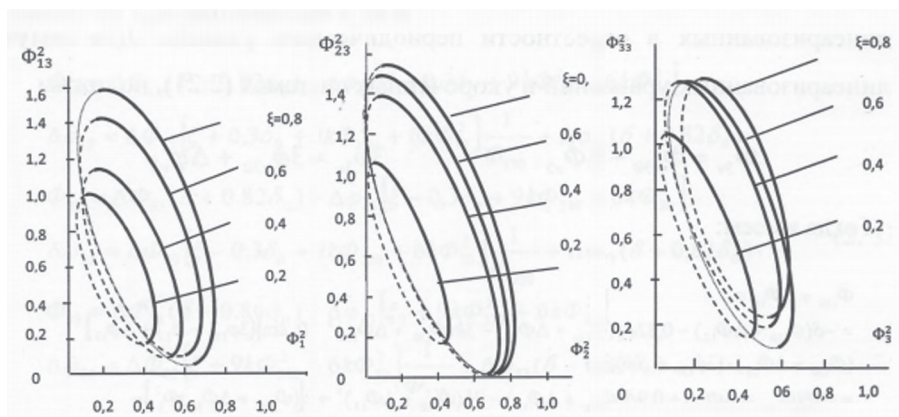


Рис. 2. Входные-выходные характеристики СГК третьего порядка в зависимости от ёмкости
Fig. 2. Input-output characteristics of third-order subharmonic oscillations depending on the capacitance

уравнение (13), описывающее последовательное соединение трехфазной феррорезонансной цепи, обозначения

$$t = \frac{3\tau}{\omega}, \quad \frac{d^2\Phi}{dt^2} = \frac{\omega^2}{9} \frac{d^2\Phi}{d\tau^2} \text{ и умножив на } 9/\omega^2, \text{ получим:}$$

$$\begin{aligned} & \frac{d^2\Phi_v}{dt^2} + \frac{9}{\omega^2} \alpha R_0 \sum_{n=1}^3 \frac{d\Phi_n}{dt} + \frac{9}{\omega^2} \frac{\alpha}{C} \Phi_v + \\ & + \frac{9}{\omega^2} \frac{\beta}{C} \Phi_v^3 + \frac{9}{\omega^2} 3\beta R_0 \sum_{n=1}^3 \Phi_n^2 \frac{d\Phi_n}{dt} + \\ & + \frac{9}{\omega^2} 3R\beta\Phi_{1v}^2 \frac{d\Phi_v}{dt} + \frac{9}{\omega^2} R\alpha \frac{d\Phi_v}{dt} = \\ & = \frac{9}{\omega^2} U_m \omega \cos\left(3\tau + \frac{(v-1)2\pi}{m}\right). \end{aligned} \quad (30)$$

При $\tau = \omega t = 0$

$$\frac{9}{\omega^2} \frac{\alpha}{C} \Phi_v + \frac{9}{\omega^2} \frac{\beta}{C} \Phi_v^3 = \frac{9}{\omega^2} U_m \omega \cos\left(3\tau + \frac{(v-1)2\pi}{m}\right). \quad (31)$$

Исключив Φ_v^3 из (31) и умножив на $\frac{\omega^2}{9} \frac{C}{\beta}$, получим:

$$\Phi_v^3 + \Phi_v \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\omega C}{\beta} U_{m1v} \cos\left(3\tau + \frac{(v-1)2\pi}{m}\right) = 0, \quad (32)$$

где $v = 1-3$ – порядок фаз.

Из (32) имеем:

$$\Phi_v = \sqrt[3]{\frac{U_m \omega C}{2\beta} \cos(3\tau + \varphi) - \sqrt{\frac{U_m^2 \omega^2 C^2}{4\beta^2} \cos^2(3\tau + \varphi) + \frac{\alpha^3}{27\beta^3}}} - \frac{\alpha}{\sqrt[3]{\frac{U_m \omega C}{2\beta} \cos(3\tau + \varphi) - \sqrt{\frac{U_m^2 \omega^2 C^2}{4\beta^2} \cos^2(3\tau + \varphi) + \frac{\alpha^3}{27\beta^3}}}}. \quad (33)$$

Выражение (33) позволяет определить процесс возбуждения СГК $\omega/3$ в трехфазных феррорезонансных цепях с нулевым проводом.

С помощью пакета MATLAB построена осциллограмма кривых установившегося режима СГК $\omega/3$ последовательной феррорезонансной цепи при значениях параметров: $U = 100$ В, $C = 120 \cdot 10^{-6}$ Ф, $R = 5$ Ом; $R_0 = 2$ Ом; $\alpha = 1,0$; $\beta = 0,2$; $\omega = 314,15926$ с⁻¹ со сдвигами фаз 0, 40, 160°, представленная на рис. 3.

На рис. 4 показаны осциллограммы СГК, полученные экспериментально при параметрах цепи: $U = 100$ В, $C = 120 \cdot 10^{-6}$ Ф, $R = 5$ Ом; $R_0 = 2$ Ом.

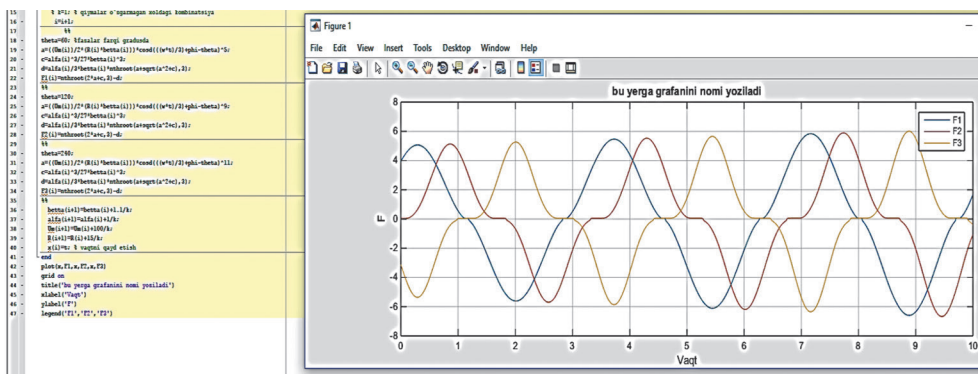


Рис. 3. Осциллограмма потоков субгармоник $\omega/3$

Fig. 3. Waveform of $\omega/3$ subharmonic flows

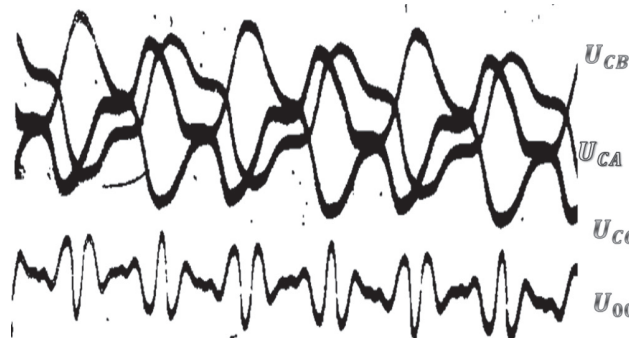


Рис. 4. Осциллограммы СГК $\omega/3$ в трехфазной феррорезонансной цепи: U_{00} – напряжение нейтрального провода

Fig. 4. Waveforms of $\omega/3$ subharmonic oscillations in a three-phase ferroresonance circuit: U_{00} is the voltage of the neutral wire

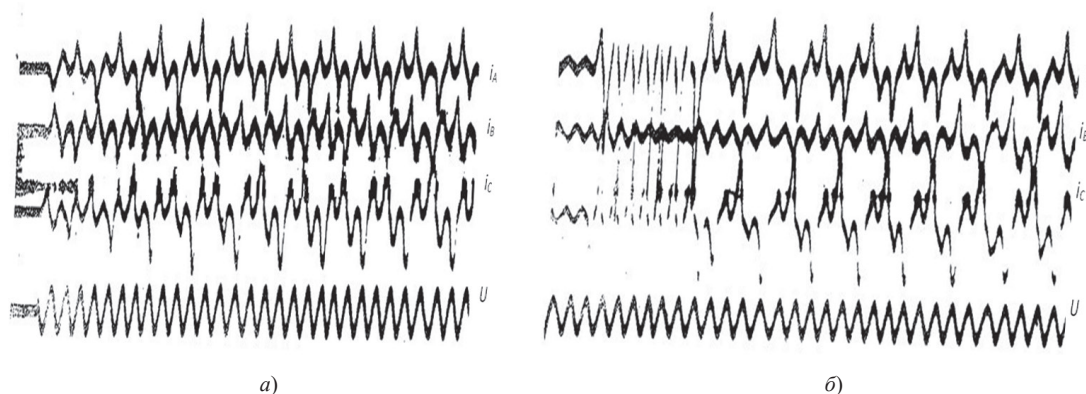


Рис. 5. Осциллограммы кривых токов SGK третьего порядка $\omega/3$: а – при включении входного напряжения; б – при КЗ ферромагнитных элементов фазы А

Fig. 5. Oscillograms of third-order SGK currents $\omega/3$: а – when the input voltage is turned on; б – when short-circuit. FE A phase

Экспериментальное исследование возбуждения SGK $\omega/3$ в трехфазных феррорезонансных цепях. Теоретический анализ и результаты компьютерного моделирования показали, что SGK третьего порядка в симметричных трехфазных электроферромагнитных цепях могут возникать при определенных соотношениях параметров цепи и приложенного напряжения и ограничиваются некоторой областью существования. SGK $\omega/3$ в большинстве случаев возбуждаются “жестко” после коммутационных процессов и сопровождаются скачкообразным изменением токов, напряжений и нарушением симметрии системы, создавая различные варианты сдвига фаз.

Исследования показывают, что в схемах с нулевым проводом SGK третьего порядка могут существовать в одной, двух или одновременно в трех фазах, а в схемах без нулевого провода в большинстве случаев – одновременно в трех фазах с различными вариантами сдвига фаз между смежными фазами. Вероятность возникновения SGK $\omega/3$ в фазах с различными вариантами сдвига фаз в основном зависит от начальных условий, параметров цепи, приложенного напряжения, степени нелинейности ферромагнитных элементов, а также от условий коммутации.

На рис. 5, а и б показаны осциллограммы кривых токов SGK $\omega/3$, характеризующие процесс возбуждения и протекание переходного процесса в трехфазных феррорезонансных цепях с последовательно соединенными элементами, полученными экспериментально.

Для получения достоверных результатов опыты проводились многократно при различных значениях параметров сети в условиях коммутации, влияющих на возбуждение и поддержание SGK.

Характеристики, полученные экспериментально, соответствуют расчетным данным и критическим значениям параметров цепи.

Выводы. В трехфазной феррорезонансной цепи возбуждение субгармонических колебаний и характер протекания переходного процесса зависят от начальных условий, структуры цепи и способа соединения

элементов и оказывают значительное влияние на амплитудно-фазовые взаимодействия частот и нелинейные взаимодействия отдельных фаз.

При возбуждении автоколебаний на высших и низших частотах нарушается симметрия системы, увеличиваются токи и напряжения в фазах, линейных и нейтральных проводах, а также на отдельных элементах цепи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Евдокунин Г.А., Титенков С.С. Феррорезонансные перенапряжения при несимметричных включениях силовых трансформаторов 6–10 кВ. – Известия РАН. Энергетика, 2001, № 6, с. 67–75.
2. Селиванов В.Н. Эквивалентная схема сети с изолированной нейтралью с защитой от феррорезонанса. – Известия РАН. Энергетика, 2001, № 1, с. 94–99.
3. Васин В.П. Низкочастотные колебания в протяженных энергосистемах с переменными динамическими параметрами. – Известия РАН. Энергетика, 1998, № 3, с. 87–96.
4. Маслеников В.А. Демпфирование низкочастотных колебаний в энергосистемах. – Известия вузов. Энергетика, 1995, № 5-6, с. 9–14.
5. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974, 503 с.
6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1984, с. 64–74.
7. Бессонов Л.А. Нелинейные электрические цепи. М.: Высшая школа, 1977, 264 с.
8. Ивашев В.И. Колебания в нелинейных электрических системах. Ташкент: Фан, 1967, 171 с.
9. Базуткин В.В. и др. Перенапряжения в электрических системах и защита от них. СПб.: Энергоатомиздат, 2010, 275 с.
10. Саенко Ю.Л., Попов А.С. Исследование феррорезонансных процессов с учетом варьирования вебер-амперной характеристики трансформаторов напряжения, 2012, с. 123–132 [Электрон. ресурс]. URL: <http://ena.lp.edu.ua:8080/bitstream/ntb/15992/1/22-Saenko-123-132.pdf> (дата обращения 10.06.2021).
11. Каримов А.С., Турдиев М.Т. Особенности возбуждения субгармонических колебаний в многоконтурных феррорезонансных цепях переменного тока. – Электричество, 1979. №11, с. 20–25.
12. Ибадуллаев М., Товбаев А.Н., Есенбеков А.Ж. Автоколебания на частоте субгармоник в нелинейных электрических цепях и системах. – Методические вопросы исследования надежности больших систем энергетики, 2019, вып. 70, кн. 2, с. 191–197.
13. Аллаев К.Р. Матричные методы анализа малых колебаний электрических систем. Ташкент: Fan va texnologiya, 2016, 431 с.

14. **Товбаев А.Н. и др.** Частотно-энергетические соотношения при анализе автопараметрических колебаний. – Горный вестник, Узбекистан, 2017, № 2, с. 165–170.

15. **Wright Jan A.** Subharmonic oscillations in power systems. Discuss. – IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, 1970, No. 8, pp. 61–65.

16. **Okumura K., Nakamura S., Kishima A.** Experimental and Analytical Investigation on 1/3-Subharmonic Oscillations in Three-Phase Circuits. – IEEE Transactions on Power and Energy, 1987, 107(1), DOI: 10.1541/ieejpes1972.107.1.

[10.06.2021]



Товбаев Акром Нурманович – кандидат техн. наук, доцент кафедры «Электроэнергетика» Навоийского государственного горного института, Навои, Узбекистан.



Авторы: **Ибадуллаев Мухтархан** – доктор техн. наук, профессор кафедры «Электротехника» Ташкентского государственного технического университета имени Ислама Каримова, Ташкент, Узбекистан.



Есенбеков Азамат Жолдасбаевич – старший преподаватель кафедры «Электроэнергетика», Каракалпакского государственного университета имени Бердаха, Нукус, Узбекистан.

Elektrichestvo, 2021, No. 12, pp. 35–44

DOI:10.24160/0013-5380-2021-12-35-44

On the General Theory for Analysis of Subharmonic Oscillations in Three-Phase Ferroresonance Circuits and Systems

IBADULLAEV Muhtarhan (Tashkent State Technical University named after Islam Karimov, Tashkent, Uzbekistan) – Professor of the Electrical Engineering Dept., Dr. Sci. (Eng.).

TOVBAEV Akrom N. (Navoi State Mining Institute, Navoi, Uzbekistan) – Docent of the Electric Power Engineering Dept., Cand. Sci. (Eng.).

ESENBEKOV Azamat Zh. (Karakalpak State University, Nukus, Uzbekistan) – Senior Lecturer of the Electric Power Engineering Dept.

The general theory for analysis of subharmonic oscillations at a frequency of $\omega/3$ in three-phase ferroresonance circuits is presented. The occurrence and existence of ferroresonance oscillations at subharmonic frequencies in power transmission lines and power supply systems is highly undesirable, since they cause overvoltages at various frequencies. At the same time, there is an extensive class of nonlinear electrical circuits in which the excitation of autoparametric oscillations at the frequency of subharmonics forms the basis of phase-discrete frequency converting devices serving as secondary power sources. To study the regularities of excitation and maintaining of subharmonic oscillations at a frequency of $\omega/3$ in three-phase ferroresonance circuits, theoretical and experimental studies of an equivalent model of a three-phase circuit with nonlinear inductance were carried out. A generalized nonlinear differential equation for a three-phase circuit with mixed connection of its elements is derived. The steady-state mode of subharmonic oscillations at a frequency of $\omega/3$ is analyzed using the small parameter (averaging) method, which made it possible to determine their existence domains and circuit critical parameters. A mathematical model and algorithm for calculating autoparametric oscillations have been developed to study the subharmonic oscillation excitation processes at a frequency of $\omega/3$ in three-phase ferroresonance circuits depending on the initial conditions, circuit parameters and input voltage. The theoretical study results have been confirmed experimentally.

Key words: ferroresonance, self-oscillations, subharmonic, subharmonic oscillations, approximation, small parameters, ferromagnetic element

REFERENCES

1. **Evdokunin G.A., Titenkov S.S.** *Izvestiya RAN. Energetika – in Russ. (Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Power Engineering)*, 2001, No. 6, pp. 67–75.
2. **Selivanov V.N.** *Izvestiya RAN. Energetika – in Russ. (Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Power Engineering)*, 2001, No. 1, pp. 94–99.
3. **Vasin V.P.** *Izvestiya RAN. Energetika – in Russ. (Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Power Engineering)*, 1998, No. 3, pp. 87–96.
4. **Maslennikov V.A.** *Izvestiya RAN. Energetika – in Russ. (Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Power Engineering)*, 1995, No. 5-6, pp. 9–14.
5. **Bogolyubov N.N., Mitropol'skiy Yu.A.** *Asimptoticheskie metody v teorii nelineynykh kolebaniy (Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations)*. M.: Nauka, 1974, 503 p.
6. **Korn G., Korn T.** *Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov (Handbook of Mathematics for Scientists and Engineers)*. M.: Nauka, 1984, pp. 64–74.
7. **Bessonov L.A.** *Nelineynye elektricheskie tsepi (Nonlinear Electrical Circuits)*. M.: Vysshaya shkola, 1977, 264 p.
8. **Ivashev V.I.** *Kolebaniya v nelineynykh elektricheskikh sistemah (Oscillations in Nonlinear Electrical Systems)*. Tashkent: Fan, 1967, 171 p.
9. **Bazutkin V.V., et al.** *Perenapryazheniya v elektricheskikh sistemah i zashchita ot nih (Overvoltage in Electrical Systems and Protection Against Them)*. SPb.: Energoatomizdat, 2010, 275 p.
10. **Saenko Yu.L., Popov A.S.** *Issledovanie ferrozonansnykh protsessov s uchyotom var'irovaniya veber-ampernoy karakteristiki transformatorov napryazheniya (Investigation of ferroresonant processes taking into account the variation of the weber-ampere characteristic of the voltage transformer)*, 2012, pp. 123–132 [Electron. resource], URL: <http://ena.lp.edu.ua:8080/bitstream/ntb/15992/1/22-Saenko-123-132.pdf> (Date of appeal 10.06.2021).
11. **Karimov A.S., Turdiev M.T.** *Elektrichestvo – in Russ. (Electricity)*, 1979. №11, c. 20–25.
12. **Ibadullaev M., Tovbaev A.N., Esenbekov A.Zh.** *Metodicheskie voprosy issledovaniya nadezhnosti bol'shikh sistem energetiki – in Russ. (Methodological Issues of Researching the Reliability of Large Energy Systems)*, 2019, iss. 70, book. 2, pp. 191–197.
13. **Allaev K.R.** *Matrichnye metody analiza malyykh kolebaniy elektricheskikh sistem (Matrix methods for the analysis of small oscillations of electrical systems)*. Tashkent: Fan va texnologiya, 2016, 431 p.
14. **Tovbaev A.N., et al.** *Gornyy vestnik – in Russ. (Mountain Bulletin)*, Uzbekistan, 2017, No. 2, pp. 165–170.
15. **Wright Jan A.** Subharmonic oscillations in power systems. Discuss. – IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, 1970, No. 8, pp. 61–65.
16. **Okumura K., Nakamura S., Kishima A.** Experimental and Analytical Investigation on 1/3-Subharmonic Oscillations in Three-Phase Circuits. – IEEE Transactions on Power and Energy, 1987, 107(1), DOI: 10.1541/ieejpes1972.107.1.

[10.06.2021]