

Индуктивность и электродинамические силы в круговых витках с параллельными осями

ЦИЦИКЯН Г.Н., АНТИПОВ М.Ю.

Филиал «ЦНИИ СЭТ», КГНЦ, Санкт-Петербург, Россия

При беспроводном способе передачи электрической энергии на автономные объекты может возникнуть необходимость в применении соединительных устройств с индуктивно-связанными конструктивными элементами. При выборе таких устройств должна быть проведена оценка их эффективности с учётом технологических и конструктивных особенностей исполнения. В статье рассмотрены выражения для взаимной индуктивности и электродинамических сил при параллельном смещении сопрягаемых витков и дисковых катушек. Получены упрощенные выражения для производной от коэффициентов индуктивности по координате, характеризующие параллельное смещение контуров. Выражения позволяют оценить влияние параллельного смещения контуров на электродинамические силы взаимодействия. Проверка полученных выражений осуществляется на основе численных сопоставлений с точным решением. На этой основе установлен предельный уровень сходимости результатов.

Ключевые слова: взаимные индуктивности, витки и катушки с параллельными осями, электродинамические силы

В работах [1–8] отмечалось важное прикладное значение проводимых исследований по оценке взаимной индуктивности системы витков, включая многovitковые планарные катушки, при наличии параллельного смещения осей в их взаимном расположении. Этому вопросу посвящено большое количество публикаций, освещающих различные практические приложения, связанные с беспроводной передачей электроэнергии, а также в других областях, в частности, в области биомедицинского применения, включая индуктивно-связанные устройства, вживляемые в органы с учётом отклонения осей [1–3]. Индуктивная связь используется и в других практических приложениях (при обнаружении дефектов в мощном фидере постоянного тока с применением анализатора как инструмента тестирования) [9].

В работе [4] дано выражение для коэффициентов взаимной индуктивности круговых контуров и соленоидов, расположенных в параллельных плоскостях с обобщением для контуров с параллельными осями, а в [5] построены кривые взаимной индуктивности дисковых катушек с обобщением на случай параллельного смещения осей. В [6] приведены формулы для индуктивностей прямоугольных планарных спиральных катушек, а в [7] моделируется взаимодействие восьмиугольных планарных катушек с магнитопроводом и без него. В [8] построены графики для взаимной индуктивности соосных планарных катушек с различными расстояниями между витками.

Коэффициент взаимной индукции между двумя несоосными круговыми витками радиусов a и b , рас-

положенными в одной плоскости (рис. 1), можно определить по формуле:

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_1 d\vec{l}_2}{R}. \quad (1)$$

Для расстояния между элементами круговых контуров $R|_{z=0}$ можно записать:

$$R|_{z=0} = \left[(x - a \cos \varphi_1 + b \cos \varphi_2)^2 + (a \sin \varphi_1 - b \sin \varphi_2)^2 \right]^{1/2},$$

а с учётом параллельного сдвига контура 2 относительно контура 1 на расстояние z в виде

$$R|_{z \neq 0} = \left[x^2 + z^2 + a^2 + b^2 - 2xa \cos \varphi_1 + \right. \\ \left. + 2xb \cos \varphi_2 - 2ab \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \right]^{1/2}. \quad (2)$$

Записывая далее скалярное произведение

$$d\vec{l}_1 d\vec{l}_2 = ab \cos(\varphi_1 - \varphi_2),$$

для взаимной индуктивности M по выражению (1) будем иметь:

$$M = \frac{\mu_0 ab}{4\pi} \int_{\varphi_2=0}^{2\pi} \int_{\varphi_1=0}^{2\pi} \frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2) d\varphi_1 d\varphi_2}{\left[x^2 + z^2 + a^2 + b^2 - 2xa \cos \varphi_1 + \right. \\ \left. + 2xb \cos \varphi_2 - 2ab \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \right]^{1/2}}. \quad (3)$$

Вводя обозначения:

$$\gamma = \frac{2ab}{x^2 + z^2 + a^2 + b^2}; \quad \alpha = \frac{2ax}{x^2 + z^2 + a^2 + b^2}; \\ \beta = \frac{2bx}{x^2 + z^2 + a^2 + b^2}, \quad (4)$$

запишем (3) как

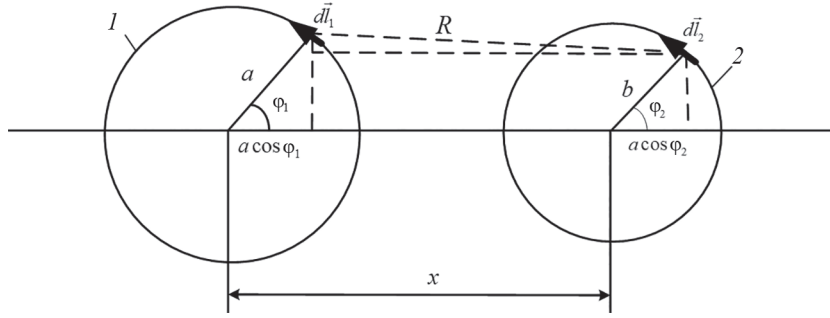


Рис. 1. Два несоосных круговых витка: a и b – радиусы круговых контуров; x – расстояние между центрами; R – расстояние между \vec{dl}_1 и \vec{dl}_2 при $z = 0$; z – расстояние между плоскостями контуров при параллельном смещении одного из контуров относительно другого

Fig. 1. Two misaligned circular turns: a and b are the radii of circuits; x – is the distance between their centers; R – distance between \vec{dl}_1 and \vec{dl}_2 at $z = 0$; z – is the distance between the planes of the circuits as one of them moves in parallel with respect to the other

$$M = \frac{\mu_0 ab}{4\pi(x^2 + z^2 + a^2 + b^2)^{1/2}} \int_{\varphi_2=0}^{2\pi} d\varphi_2 \times \int_{\varphi_1=0}^{2\pi} \frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2) d\varphi_1}{[1 - \gamma \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \alpha \cos \varphi_1 + \beta \cos \varphi_2]^{1/2}}. \quad (5)$$

в полном соответствии с выражением (5) в [5].

Дальнейшее рассмотрение будем основывать на следующих предположениях:

горизонтальное смещение x достаточно мало;

величина γ превалирует в знаменателе выражения (5) под знаком интеграла в квадратной скобке.

С учётом сказанного, коэффициент взаимной индуктивности при $\gamma < 1$ может быть записан в виде

$$M \cong \frac{\mu_0 ab}{4\pi(x^2 + z^2 + a^2 + b^2)^{1/2}} \times \int_{\varphi_2=0}^{2\pi} \int_{\varphi_1=0}^{2\pi} \left[1 + \frac{1}{2} \gamma \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{3}{8} \gamma^2 \cos^2(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{5}{16} \gamma^3 \cos^3(\varphi_1 - \varphi_2) \right] d\varphi_1 d\varphi_2, \quad (6)$$

а принимая во внимание разложение 9.03 [10], результат интегрирования может быть представлен как

$$M \cong \frac{\mu_0 \pi a^2 b^2}{2(a^2 + b^2 + x^2 + z^2)^{3/2}} \left(1 + \frac{15}{32} \gamma^2 \right), \quad (7)$$

где γ равно первому из выражений (4).

Для дальнейшего рассмотрения запишем производную $\partial M / \partial x$:

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\mu_0 \pi a^2 b^2}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} (a^2 + b^2 + x^2 + z^2)^{-3/2} + \frac{15}{32} 4(ab)^2 \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + a^2 + b^2 + z^2)^{-2-3/2} \right] = \frac{\mu_0 \pi a^2 b^2}{2} \left[-\frac{3}{2} (a^2 + b^2 + x^2 + z^2)^{-5/2} 2x + \frac{15}{8} (ab)^2 \left(-\frac{7}{2} \right) (a^2 + b^2 + x^2 + z^2)^{-9/2} 2x \right] = \quad (8)$$

$$= \frac{\mu_0 \pi a^2 b^2}{2} \left[\frac{-3x}{(a^2 + b^2 + x^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{105(ab)^2 x}{8(a^2 + b^2 + x^2 + z^2)^{9/2}} \right] = -\frac{\mu_0 \pi a^2 b^2}{2} 3x \left[\frac{(a^2 + b^2 + x^2 + z^2)^2 + \frac{35}{8}(ab)^2}{(a^2 + b^2 + x^2 + z^2)^{9/2}} \right].$$

Обратим внимание на то, что при $z = 0$ остаётся сила бокового смещения (рис. 1), определяемая в виде

$$f_x = i_1 i_2 \frac{\partial M}{\partial x} \Big|_{z=0}, \quad (9)$$

где i_1, i_2 – токи в витках.

В качестве примера рассмотрим случай, когда $x = b = a/2$ (рис. 2). Тогда на основании (9)

$$f_x = -i_1 i_2 \frac{\mu_0 \pi a^4}{8} \frac{3}{2} a \left[\frac{9a^4}{4} + \frac{35}{32} a^4 \right] \frac{1}{\left(\frac{3}{2} a^2 \right)^{9/2}} \cong -i_1 i_2 \mu_0 0,3177.$$

В случае многовитковых дисковых катушек, оси которых смещены относительно друг друга на расстояние x , а их плоскости – на расстояние z , выражение для взаимной индуктивности может быть записано в виде

$$M = \sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^N M_{ij}, \quad (10)$$

где

$$M_{ij} = \frac{\mu_0 \pi}{2} \frac{a_i^2 b_j^2}{(a_i^2 + b_j^2 + x^2 + z^2)^{3/2}} \left(1 + \frac{15}{32} \gamma_{ij}^2 \right); \quad (11)$$

$$\gamma_{ij} = \frac{2a_i b_j}{a_i^2 + b_j^2 + x^2 + z^2}. \quad (12)$$

Уточнённое выражение для коэффициента взаимной индукции при $x = 0$ можно записать в виде [5]:

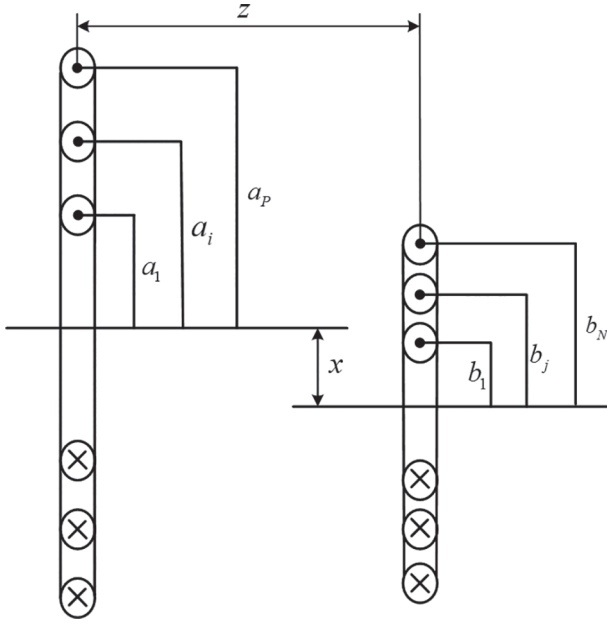


Рис. 2. Две несоосные дисковые катушки с числом витков N и P , радиусами a и b соответственно с расстоянием z между плоскостями их расположения и расстоянием между осями x

Fig. 2. Two non-coaxial disk coils with N and P turns, the radii of the turns are a and b respectively, z is the distance between their planes, x is the distance between the axes

$$M = \frac{\mu_0 \pi a^2 b^2}{2(a^2 + b^2 + z^2)^{3/2}} \left(1 + \frac{15}{32} \gamma^2 + \frac{315}{1024} \gamma^4 \right), \quad (13)$$

где $\gamma_{ij} = \frac{2ab}{a^2 + b^2 + z^2}$, если $x = 0$.

Перейдём теперь к определению сил при $x = 0$ на основании формулы (13). Перепишем (13) в виде

$$M = \frac{\mu_0 \pi a^2 b^2}{2} \left[\frac{(a^2 + b^2 + z^2)^{-3/2}}{1} + \frac{15}{8} a^2 b^2 (a^2 + b^2 + z^2)^{-7/2} + \frac{315}{64} a^4 b^4 (a^2 + b^2 + z^2)^{-11/2} \right]. \quad (14)$$

Тогда для производной $\partial M / \partial z$ будем иметь:

$$\frac{\partial M}{\partial z} = -\frac{\mu_0 \pi a^2 b^2 z}{2} \left[\frac{3(a^2 + b^2 + z^2)^{-5/2}}{1} + \frac{13,125(ab)^2 (a^2 + b^2 + z^2)^{-9/2}}{1} + \frac{54,1406(ab)^4 (a^2 + b^2 + z^2)^{-13/2}}{1} \right]. \quad (15)$$

Полагая $a^2 = b^2 = R^2$ и $z = R$, находим:

$$\left. \frac{\partial M}{\partial z} \right|_{a=b=z=R} = -\mu_0 0,5166.$$

Для проверки полученного результата прибегнем к расчёту по выражению для нахождения электродина-

мической силы между двумя соосными контурами одинакового радиуса R , расположенными в параллельных плоскостях на расстоянии z :

$$f \Big|_{i_1=i_2=1A, R_1=R_2=R} = \mu_0 \frac{z}{R} \frac{Q_{1/2}^1(g)}{(g^2 - 1)^{1/2}}, \quad (16)$$

где $g = 1 + (z^2/2R^2)$; $Q_{1/2}^1(g)$ – присоединённая функция Лежандра второго рода.

Формулу (16) можно записать в виде [11]:

$$f \Big|_{i_1=i_2=1A, R_1=R_2=R} = \mu_0 \frac{Q_{1/2}^1 \left(1 + \frac{z^2}{2R^2} \right)}{\left(1 + \frac{z^2}{4R^2} \right)^{1/2}}. \quad (16a)$$

Для случая $z/R = 1,0$ и, следовательно, $Q_{1/2}^1(1,5) = -0,6391$ будем иметь

$$\mu_0 \frac{-0,6391}{1,11803} = -\mu_0 0,5716$$

против результата $-\mu_0 0,5166$, полученного по приближённому выражению (15).

Заметим, что строгое выражение для взаимной индуктивности при параллельном сдвиге осей круговых контуров известно и дано в работах [4, 12, 13].

Результаты вычислений $(\partial M / \partial z)$ по формуле для двух соосных контуров одинакового радиуса (16a) и формуле (15) для четырёх значений z/R сведены в таблицу. С увеличением отношения z/R разницей можно пренебречь.

z/R	$\partial M / \partial z$ (формула (15))	$\partial M / \partial z$ (формула (16a))
$1/\sqrt{2}$	$-0,729\mu_0$	$-1,0355\mu_0$
1	$-0,5166\mu_0$	$-0,5716\mu_0$
2	$-0,1212\mu_0$	$-0,1215\mu_0$
3	$-0,0356\mu_0$	$-0,03654\mu_0$

Как видно, наибольшее расхождение имеет место с уменьшением отношения z/R .

Следует отметить, что применение способа бесконтактной передачи электроэнергии приобретает повышенную актуальность при заряде аккумуляторных батарей подводного робота как автономного необитаемого подводного аппарата в режиме длительного подводного базирования [14]. Описание магнитного поля и сил в системе левитации высокоскоростного транспорта дано в [15], а электродинамические силы, действующие на контур с током в поле соленоида при перемещении вдоль оси, рассмотрены в [16]. Вместе с тем, в ряде случаев проявление индуктивной связи может оказывать и негативное воздействие, что хорошо проиллюстрировано на примере, описанном в работе [17].

Выводы. Даны выражения для оценки взаимных индуктивностей и электродинамических сил при воз-

никновении эксцентриситетов, в частности, для оценки сил бокового смещения между контурами, в том числе, при совмещенных плоскостях их расположения. Полученные оценки могут быть использованы на практике при осуществлении передачи электроэнергии на автономные объекты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Soma M., Galbraith D.C., White R.L. Radio-Frequency Coils in Implantable Devices: Misalignment Analysis and Design Procedure. – IEEE Transactions on Biomedical Engineering, 1987, vol. 34, No. 4, pp. 276–282, DOI: 10.1109/tbme.1987.326088.
2. Kim K.B. et al. Restoring Force Between Two Noncoaxial Circular Coils. – IEEE Transactions on Magnetics, 1996, vol. 32, No. 2, pp. 478–484, DOI: 10.1109/20.486535Xplore.
3. Meyer P. et al. Design of contactless Energy – Transfer System for Desktop Peripherals. – IEEE Transactions on Industry Applications, 2011, vol. 47, No. 4, pp. 1643–1651, DOI:10.1109/TIA.2011.2153812.
4. Ren Y. Magnetic Force Calculation between Misaligned Coils for a Superconducting Magnet. – IEEE Transactions on Applied Superconductivity, 2016, vol. 20, No. 6, pp. 2350–2353, DOI:10.1109/TASC.2010.2068297.
5. Raju S. et al. Modeling of Mutual Coupling between Planar Inductors in Wireless Power Applications. – IEEE Transactions on Power Electronics, 2014, vol. 29, No. 1, pp. 481–490, DOI:10.1109/TPEL.2013.2253334.
6. Aebischer H.A. Inductance Formula for Rectangular Planar Spiral Inductors with Rectangular Conductor Cross Section. – Advanced Electromagnetics, 2020, vol. 9, No. 1, pp. 1–18.
7. Derkaoui M. et al. Design and Modeling of Octagonal Planar Inductor and Transformer in Monolithic Technology for RF Systems. – Journal of Electrical Engineering and Technology, 2021, vol. 16(7), pp.1481–1493.
8. Цицикян Г.Н., Кунаев С.Н. Строгие и приближенные выражения для коэффициента взаимной индукции и электродинамических сил соосных витков и плоских (дисковых) катушек с током. – Труды Крыловского государственного научного центра, 2022, т. 2, вып. 400, с. 127–132.
9. Li K.-R. et al. Defects Detection of High-Power DC Feeder with Multiple Parallel Cables Using Inductive Coupling Technique. – IEEE Transactions on Power Delivery, 2020, vol. 35, No. 2, pp.787–793.
10. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы: 10-е изд. СПб.: Лань, 2009, 228 с.
11. Цицикян Г.Н. О взаимной индуктивности и электродинамических силах взаимодействия коаксиальных контуров. – Известия РАН. Энергетика, 2018, № 4, с. 40–45.

12. Grover F.W. Inductance Calculation: Working Formulas and Tables. N.Y.: D VanNostrand. 1946, XIV, 286 p.

13. Цицикян Г.Н. К вопросу о коэффициенте взаимной индуктивности соленоида и кругового контура с параллельными осями. – Труды Крыловского государственного научного центра, 2021, т. 2, вып. 396, с. 93–98.

14. Герасимов В.А., Комлев А.В., Филоженко А.Ю. Новая методика расчета силового трансформатора для системы бесконтактного заряда аккумуляторных батарей подводного робота. – Труды Крыловского государственного научного центра, 2022, т. 2, № 400, с. 116–126.

15. Ким К.И., Ким К.К., Вешкин В.В. Магнитное поле и силы в гибридной системе левитации высокоскоростного транспорта. – Электричество, 2021, № 6, с. 44–50.

16. Цицикян Г.Н., Антипов М.Ю. Электродинамические силы, действующие на контур с током в поле соленоида при его перемещении вдоль оси. – Электричество, 2020, № 8, с. 58–62.

17. Chen H., Qian Z. Modeling and Characterization of Parasitic Inductive Coupling Effects of differential-Mode EMI Performance of a Boost Converter. – IEEE Transactions of Electromagnetic Compatibility, 2011, vol. 53, No. 4, pp. 1072–1080, DOI:10.1109/TEM.2010.2102030.

Поступила в редакцию [20.05.2022]

Принята к публикации [17.11.2022]

Авторы:



Цицикян Георгий Николаевич – доктор техн. наук, начальник сектора, заместитель начальника отдела НИО-11 филиала «Центральный научно-исследовательский институт судовой электротехники и технологии», ФГУП «Крыловский государственный научный центр», Санкт-Петербург, Россия.



Антипов Михаил Юрьевич – ведущий инженер отдела электро-энергетических систем филиала «Центральный научно-исследовательский институт судовой электротехники и технологии», ФГУП «Крыловский государственный научный центр», Санкт-Петербург, Россия.

Elektrichestvo, 2023, No. 1, pp. 52–56

DOI:10.24160/0013-5380-2023-1-52-56

Inductance and Electrodynamic Forces in Circular Turns with Parallel Axes

TSITSIKYAN Georgiy N. (Branch "Central Research Institute of Marine Electrical Engineering and Technology", FSUE "Krylovsky State Scientific Center", St. Petersburg, Russia) – Head of the Sector, Deputy Head of the NIO-11 Dept., Dr. Sci. (Eng.).

ANTIPOV Mikhail Yu. (Branch "Central Research Institute of Marine Electrical Engineering and Technology", FSUE "Krylovsky State Scientific Center", St. Petersburg, Russia) – Leading Engineer of the Electric Power Systems Dept.

With a wireless method of transmitting electrical energy to autonomous objects, a need may arise to use connecting devices with inductively coupled structural elements. When choosing such devices, their effectiveness should be evaluated taking into account the technological and design features of the embodiment. Expressions

for mutual inductance and electrodynamic forces with parallel displacement of mating turns and disk coils are considered. Simplified expressions for the derivative of the inductance coefficients in the coordinate characterizing the parallel displacement of the loops are obtained. By using the obtained expressions, the effect of parallel displacement of the loops on the electrodynamic interaction forces can be evaluated. The obtained expressions are verified by numerically comparing them with the exact solution. On this basis, the maximum level of convergence of the results has been determined.

Key words: mutual inductances, turns and coils with parallel axes, electrodynamic forces

REFERENCES

1. **Soma M., Galbraith D.C., White R.L.** Radio-Frequency Coils in Implantable Devices: Misalignment Analysis and Design Procedure. – IEEE Transactions on Biomedical Engineering, 1987, vol. 34, No. 4, pp. 276–282, DOI: 10.1109/tbme.1987.326088.
2. **Kim K.B. et al.** Restoring Force Between Two Noncoaxial Circular Coils. – IEEE Transactions on Magnetics, 1996, vol. 32, No. 2, pp. 478–484, DOI: 10.1109/20.486535Xplore.
3. **Meyer P. et al.** Design of contactless Energy – Transfer System for Desktop Peripherals. – IEEE Transactions on Industry Applications, 2011, vol. 47, No. 4, pp. 1643–1651, DOI:10.1109/TIA.2011.2153812.
4. **Ren Y.** Magnetic Force Calculation between Misaligned Coils for a Superconducting Magnet. — IEEE Transactions on Applied Superconductivity, 2016, vol. 20, No. 6, pp. 2350–2353, DOI:10.1109/TASC.2010.2068297.
5. **Raju S. et al.** Modeling of Mutual Coupling between Planar Inductors in Wireless Power Applications. – IEEE Transactions on Power Electronics, 2014, vol. 29, No. 1, pp. 481–490, DOI:10.1109/TPEL.2013.2253334.
6. **Aebischer H.A.** Inductance Formula for Rectangular Planar Spiral Inductors with Rectangular Conductor Cross Section. – Advanced Electromagnetics, 2020, vol. 9, No. 1, pp. 1–18.
7. **Derkaoui M. et al.** Design and Modeling of Octagonal Planar Inductor and Transformer in Monolithic Technology for RF Systems. – Journal of Electrical Engineering and Technology, 2021, vol. 16(7), pp.1481–1493.
8. **Tsitsikyan G.N., Kunaev S.N.** *Trudy Krylovskogo gosudarstvennogo nauchnogo tsentra – in Russ. (Transactions of the Krylov State Research Centre)*, 2022, vol. 2, iss. 400, pp. 127–132.
9. **Li K.-R. et al.** Defects Detection of High-Power DC Feeder with Multiple Parallel Cables Using Inductive Coupling Technigue. – IEEE Transactions on Power Delivery, 2020, vol. 35, No. 2, pp.787–793.
10. **Dvayt G.B.** *Tablitsy integralov i drugie matematicheskie formuly (Tables of Integrals and Other Mathematical Formulas): 10th ed.* SPb.: Lan', 2009, 228 p.
11. **Tsitsikyan G.N. Izvestiya RAN. Energetika – in Russ. (News of the Russian Academy of Sciences. Power Engineering), 2018, No. 4, pp. 40–45.**
12. **Grover F.W.** Inductance Calculation: Working Formulas and Tables. N.Y.: D VanNostrand. 1946, XIV, 286 p.
13. **Tsitsikyan G.N.** *Trudy Krylovskogo gosudarstvennogo nauchnogo tsentra – in Russ. (Transactions of the Krylov State Research Centre)*, 2021, vol. 2, iss. 396, pp. 93–98.
14. **Gerasimov V.A., Komlev A.V., Filozhenko A.Yu.** *Trudy Krylovskogo gosudarstvennogo nauchnogo tsentra – in Russ. (Transactions of the Krylov State Research Centre)*, 2022, vol. 2, iss. 400, pp. 116–126.
15. **Ким К.И., Ким К.К., Вешкин В.В.** *Elektrichestvo – in Russ. (Electricity)*, 2021, No. 6, pp. 44–50.
16. **Tsitsikyan G.N., Antipov M.Yu.** *Elektrichestvo – in Russ. (Electricity)*, 2020, No. 8, pp. 58–62.
17. **Chen H., Qian Z.** Modeling and Characterization of Parasitic Inductive Coupling Effects of differential-Mode EMI Performance of a Boost Converter. – IEEE Transactions of Electromagnetic Compatibility, 2011, vol. 53, No. 4, pp. 1072–1080, DOI:10.1109/TEMC.2010.2102030.

Received [20.05.2022]

Accepted [17.11.2022]